

इकाई 3 बच्चों को गणित सीखने में मदद

इकाई की रूपरेखा	पृष्ठ सं.
3.1 परिचय उद्देश्य	45
3.2 बच्चे की पृष्ठभूमि के आधार पर आगे बढ़िए	46
3.3 संबंध जोड़ना	48
3.4 अ—भा—चि—प्र	50
3.5 खेल-खेल में सीखना	53
3.6 सीखने में मददगार अन्य तरीके जरूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं गलतियां उपयोगी होती हैं	55
3.7 सारांश	59
3.8 अभ्यासों पर टिप्पणियाँ	59

3.1 परिचय

क्या आपको अपने स्कूल के दिन, खास तौर से गणित की कक्षाएं याद हैं? इन कक्षाओं में ऐसा क्या था जिससे गणित आपको पसंद या नापसंद आया? इस इकाई में हम इन्हीं प्रश्नों से संबंधित कुछ मुद्दे उठाएंगे। इस इकाई का पिछली इकाई से गहरा संबंध है जिसमें हमने पूर्व व प्राइमरी स्कूली बच्चों के कुछ पहलुओं पर चर्चा की थी। वहाँ हमने देखा था कि:

- (i) बच्चों और बड़ों के सोचने के ढंग में बहुत फर्क होता है।
- (ii) बच्चों के विकास का एक निश्चित क्रम होता है और यह क्रम आम तौर पर सभी पर लागू होता है। लेकिन हर बच्चे की विकास की गति अलग-अलग होती है।
- (iii) हर बच्ची अपने आसपास की चीजों का “अर्थ निकालने” के अपने रास्ते विकसित कर लेती है।
- (iv) बच्चे जब औपचारिक स्कूल में दाखिल होते हैं, वे कुछ गणित पहले से ही जानते हैं।
- (v) छोटे बच्चे अपने आसपास की दुनिया को समझने के तरीके बनाने के लिए खेल व अन्य गतिविधियों का इस्तेमाल करते हैं।
- (vi) बड़े बच्चे भी ठोस पदार्थों व खेलों से सीखते हैं, और सीखने के इन अनुभवों के द्वारा स्कूलों में दिए जाने वाले औपचारिक ज्ञान का भी अर्थ निकाल सकते हैं।
- (vii) अफसोस की बात है कि गणित के ज्यादातर शिक्षक समझने की बजाय रटने व ऐल्गोरिद्म पर जोर देते हैं। हो सकता है कि गणित के ये “नियम” बड़ों को समझ में आ जाएं, लेकिन यह जरूरी है कि इन्हें बच्चों को ऐसे तरीकों से ही सिखाया जाए जिनसे बच्चे इन्हें समझ सकें।
- (viii) हम जानते हैं कि किसी भी गणितीय अवधारणा या कुशलता सीखने के दौरान बच्चे किस तरह की लम्बी व कठिन प्रक्रिया से गुजरते हैं। लेकिन औपचारिक स्कूली व्यवस्था में जो समय पाठ्यक्रम को “पूरा करने” के लिए दिया जाता है उसमें इस बात को ध्यान में नहीं रखा जाता है।

यह पूरी सूची नहीं है। इकाई 2 पर एक नज़र डालकर इस सूची को पूरा कर लें। आपको शायद इससे फ़ायदा हो क्योंकि वर्तमान इकाई में हमारी चर्चा इस बात पर होगी कि गणित सिखाते वक़्त उन बातों को ध्यान में क्यों रखना चाहिए।

इस इकाई में हमने कुछ ऐसे सिद्धांतों पर ज़ोर देने का प्रयास किया है जिन्हें पूर्व स्कूली व प्राइमरी स्कूलों के बच्चों को गणित सिखाने के दौरान ध्यान में रखना ज़रूरी है। ऐसा करने से प्राइमरी स्कूल के किसी भी एक बच्चे के लिए एक ऐसा माहौल बनाने में मदद मिलेगी जो उसकी विकास की अवस्था, उसकी ज़रूरतों, उसके सोचने व सीखने के तरीकों और सीखने की गति के मुताबिक होगा।

हमने गतिविधियों व अनुभवों के कुछ ऐसे उदाहरण भी दिए हैं जिन्हें बच्चों को उनके गणितीय तरीके से सोचने के ढंग को विकसित करने के लिए दिया जा सकता है। हाँ, यह ज़रूर है कि जिन गतिविधियों के उदाहरण हमने सुझाए हैं वे एक शहरी परिस्थिति से हैं। सच तो यह है कि सभी शहरी क्षेत्रों के लिए भी एक जैसा उदाहरण सोच पाना मुश्किल है। हमारी उम्मीद है कि आप अपने सीखने वालों की ज़रूरतों के अनुसार गतिविधियों को ढाल लेंगे।

कृपया पिछली इकाई को एक बार फिर से देख लें ताकि आप उसमें दिए गए सिद्धांतों का इस इकाई में दी गयी बातों से आसानी से संबंध जोड़ सकें।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- समझा सकेंगे कि किसी शिक्षक के लिए अपने सीखने वालों के विकास के स्तरों को जानना ज़रूरी क्यों है;
- ऐसे तरीकों को पहचान सकेंगे जिनसे आप बच्चों को अपनी गणितीय तरीके से सोचने की क्षमता को विकसित करने में मदद दे सकें;
- ऐसे सिद्धांतों की सूची बना सकेंगे जिन्हें गणित की विशेष अवधारणाएँ व कौशल प्रभावशाली तरीके से सिखाने के लिए गतिविधियाँ बनाते समय ध्यान में रखना चाहिये।

3.2 बच्चे की पृष्ठभूमि के आधार पर आगे बढ़िए

जैसा कि आपने इकाई 2 में पढ़ा, कोई भी दो बच्चे एक जैसे नहीं होते। हर बच्चे की उम्र, जानकारी का स्तर, पृष्ठभूमि वगैरह अलग होती है। एक शिक्षक के लिए इन बातों का क्या महत्व है? क्या उसे इन बातों व सीखने के फर्क तरीकों को ध्यान में रखना ज़रूरी नहीं है? नीचे दिए अभ्यास में हम आपसे आपके सीखने वालों के इस पहलू पर गौर करने के लिए कह रहे हैं।



1: एक शिक्षक को अपने सीखने वालों में जो फर्क होते हैं उनके प्रति जागरूक होना चाहिए।

E1) सीखने वालों के बीच अन्य और क्या अंतर हैं जिन्हें एक शिक्षक को पढ़ाते समय ध्यान में रखना चाहिए ?

चलिए एक उदाहरण देखते हैं जिसमें एक शिक्षक ने अपने विद्यार्थी की सीखने में मदद करने के लिए उसकी पृष्ठभूमि को ध्यान में रखा।

एक गाँव के स्कूल में पांचवी कक्षा के एक बच्चे, सुमित, को जोड़ और घटा करने के औपचारिक तरीके से परिचित कराया जा रहा था। शिक्षक ने औपचारिक तरीका पढ़ाने से पहले यह समझने की कोशिश की कि उसे पहले से ही कितना आता है।

शिक्षक : 8 और 11 कितने होते हैं?

सुमित : 19

शिक्षक : यह तुमने कैसे किया?

सुमित : गिनकर। मैंने पहले 11 लिया और फिर 8 जोड़ दिए।

सुमित ने बड़ी संख्या से "आगे गिनने" (counting on) का तरीका अपनाया था और अपना तरीका वह शब्दों में समझा भी पाया था।

शिक्षक : अच्छा! 22 जोड़ 19 कितना होगा?

सुमित (22+19 लिखकर) : 41?

शिक्षक : तुमने क्या 22 से आगे एक-एक करके गिना?

सुमित : मैंने पहले 19 में से 10 लिए, और इस तरह हो गए 32, और फिर बचे हुए 9 लिए, और 41 हो गए।

इस बार सुमित ने "पुनः समूहीकरण" (regrouping) का तरीका अपनाया ताकि वह आसानी से जोड़ सके।

इसके बाद उसे दिया गया लिखित अभ्यास 18

$$\begin{array}{r} +5 \\ \hline 18 \\ \hline 23 \end{array}$$

उसका उत्तर था 41

उसका यह उत्तर कैसे आया? उसने इकाई के कॉलम में 8 और 5 को ठीक जोड़कर जवाब पाया 13, फिर 1 को इकाई के कॉलम के नीचे लिखकर, "हासिल" के 3 लिए और दहाई के 1 में जोड़ दिए। इस तरह इकाई के कॉलम में आया 4. इसलिए, उसका उत्तर था 41!

उसे पूरी तरह से यकीन था कि उसका उत्तर सही है। तब शिक्षक ने प्रश्न को दूसरी तरह से रखना तय किया। उन्होंने कहा, "अगर तुम्हारे पास 18 कंचे थे और तुम्हें 5 कंचे और मिल जाते, तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितने कंचे हो जाते?" सुमित ने अपनी उंगलियों पर गिना और कह, 23। जब शिक्षक ने उसका ध्यान उसके लिखित उत्तर की तरफ़ दिलाया तो वह धीरे-धीरे मान गया कि वह उत्तर ग़लत था। है ना यह रोचक बात कि वह औपचारिक तरीके की बजाए अपने मन से किए तरीके को सही मानने को तैयार था?

इस उदाहरण में सुमित ने संख्याओं को जोड़ने के लिए उचित और कुशल तरीकों को इस्तेमाल करने की अच्छी तरह विकसित क्षमता का प्रदर्शन किया। हालांकि उसे औपचारिक प्रतीकों से जोड़-तोड़ करना कठिन लगा। इसके कई कारण हो सकते हैं। यह हो सकता है कि सुमित को स्थानीय मान की पूरी समझ नहीं है। यह भी हो सकता है कि सुमित को दी गई संख्याओं को जोड़ने का यह काम गणितीय नियमों से करना सार्थक न लगा हो। जैसे ही शिक्षक ने सवाल को एक संदर्भ में और ठोस वस्तुओं (कंचे गिनना) के साथ रखा, सुमित उसे समझ गया और इसलिए हल भी कर पाया।

सवालों को बच्चों के अनुभवों के संदर्भ में रखना चाहिए।

यह उदाहरण साफ़ तौर पर दिखाता है कि सुमित ने जोड़ करने के अपने तरीके विकसित कर लिए हैं: "आगे गिनना" और "पुनः समूहीकरण"। वह संस्थाओं के पैटर्नों से परिचित था और इसलिए वह पुनः समूह बनाकर बड़ी संख्याओं को भी आसानी से जोड़ पाया। यह उदाहरण यह भी दर्शाता है कि शिक्षक ने कैसे सुमित की पृष्ठभूमि का अनुमान लगाया, और कैसे उस जानकारी का उपयोग करके सवाल को दो तरह से सुमित की समझ में लाने की कोशिश की:

- सवाल को उसके अनुभवों के संदर्भ में रखकर, और
- सवाल को उसके लिए ठोस बनाकर।

अब आपके लिए एक अभ्यास, जिससे आप देख सकेंगे कि एक शिक्षक के लिए बच्चे का स्तर व पृष्ठभूमि जानना कितना महत्वपूर्ण है।

E2) रवि दिल्ली नगर पालिका के एक स्कूल में कक्षा 4 का शिक्षक है। जब नया स्कूल-वर्ष शुरू हुआ तो वह पाठ्य पुस्तक खोलकर बच्चों को 4 अंकों वाली संख्याएं लिखना सिखाने

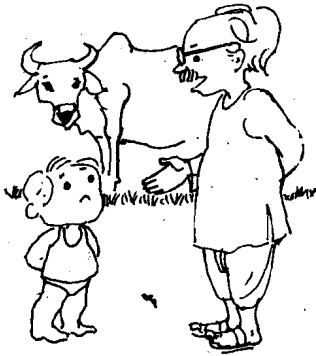
लगा। उसने किताब में से कुछ हिस्सा बोर्ड पर उतार लिया और उसके बाद उन्हें ढेर सारे सरल सवाल देकर कमरे से बाहर चला गया। बाद में, उसे यह देखकर आश्चर्य हुआ कि अधिकतर बच्चे उन सवालों को नहीं कर पाए थे। आपके हिसाब से बच्चों की ऐसी परिस्थिति क्यों बनी?

हमने इस भाग में जो कहने की कोशिश की है वह यह है कि जब किसी बच्चे को कोई अवधारणा सिखाई जा रही हो तो यह पहचानना महत्वपूर्ण है कि पहले से उसे क्या-क्या मालूम होना चाहिये, और क्या वह उतना सीख चुकी है।

चलिए अब हम सिखाने के कुछ सिद्धांतों की बात करें, खास तौर से गणित सीखने के संदर्भ में।

3.3 संबंध जोड़ना

इकाई 1 में आपने पढ़ा था कि गणितीय तरीके से सोचने की क्षमता में क्या कुछ शामिल है। इस भाग में हम बच्चों में इस क्षमता को विकसित करने के तरीकों पर चर्चा करेंगे।



चित्र 2: "इसके तीन क्यों हैं? क्योंकि, जब, इतकिए।"

जैसा कि आप जानते हैं, गणित सीखने के दौरान उत्तर पाने की प्रक्रिया पर जोर देने की ज़रूरत है, न कि सिर्फ उत्तर पाने पर। इसलिए, एक शिक्षक की हैसियत से यह ज़रूरी है कि आप बच्चों को अपने आस-पास की दुनिया को गौर से देखने, सवाल पूछने, खोज करने और तर्कों के आधार पर उत्तर ढूँढने के लिए बढ़ावा दें। यह भी ज़रूरी है कि आप उन्हें अपने तार्किक सोच को व्यवस्थित करने के लिए प्रेरित करें। आप यह सब कैसे करेंगे?

पहले तो, आप बच्चों को प्रश्न पूछने के लिए प्रेरित करें। जब बच्चे, आपसे पूछें, "कुछ पत्ते हरे और कुछ पत्ते भूरे क्यों होते हैं?", या "चांद हमारे साथ-साथ कैसे चलता है?", या "मरने के बाद लोग कहां चले जाते हैं", आपका जवाब ऐसा होना चाहिए कि उन्हें संतुष्ट कर सके। आपको ये प्रश्न चाहे कितने ही कठिन या बेवकूफी भरे लगें आपको उन्हें गंभीरतापूर्वक लेना चाहिए और तार्किक तरीके से उत्तर ढूँढने में उनकी मदद करनी चाहिए।

एक और बात जो मदद करती है वह है बच्चों के सामने ऐसे प्रश्न रखना जिनके कि उन्हें पहले से ही निश्चित जवाब न दिए जाएं। जैसे, "इस कागज़ को तुम कितनी तरह से एक वर्ग की शक्ल में मोड़ सकते हो?" उन्हें अपने प्रश्न खुद बनाने का मौका दिया जा सकता है जैसे कि सवाल जवाब या अटकलबाज़ी के खेलों में, जिनका जिक्र हमने भाग 3.5 में किया है। इस तरह के मौकों देने से बच्चे बहुत सी बातें आसानी से और रोचक तरीके से सीखते हैं। ऐसा करने से बच्चों को अपनी मानसिक क्षमताएं विकसित करने का मौका भी मिलता है। इनसे बच्चों को यह अहसास भी होता है कि एक सवाल के कई जवाब भी हो सकते हैं।

बच्चे अपने तर्कों को व्यवस्थित करें इसके लिए उन्हें बढ़ावा व मार्गदर्शन देने के लिए आप बहुत तरह की गतिविधियां सोच सकते हैं। जैसे, उनसे चीज़ों को एक ढेर का वर्गीकरण करने के लिए मापदंड (criteria) चुनने को कहा जा सकता है, और इन मानदंडों को सही तरह से लागू करने में उनकी मदद की जा सकती है। या वे अपने स्कूल के साथियों के स्कूल आने के अलग-अलग तरीकों की परिकल्पना कर सकते हैं। फिर वे आंकड़े इकट्ठे करके, उन्हें लिखकर और उनका विश्लेषण करके अपनी परिकल्पना को सिद्ध कर सकते हैं या उसका खंडन कर सकते हैं।

नीचे दिए अभ्यासों को करते वक़्त आप कुछ और गतिविधियाँ सोच सकते हैं जिनसे बच्चों को छानबीन करने और सीखने में मदद मिल सकती है।

E3) (क) मापन में एक विषय चुनिये और अपने ही संदर्भ में दो ऐसी गतिविधियां बनाइये जिनसे आपके विद्यार्थियों को इस अवधारणा की छानबीन करने और सीखने में मदद मिले।

(ख) कुछ बच्चों के साथ इन गतिविधियों को करिये और लिखिये कि किस प्रकार ये गतिविधियाँ बच्चों के गणितीय सोच को बढ़ावा देती हैं।

बच्चों को गणित सीखने में मदद

गणितीय सोच का एक महत्वपूर्ण पहलू है पैटर्नों और कड़ियों को पहचानने की क्षमता। एक शिक्षक की हैसियत से एक बच्चे में आप यह क्षमता कैसे विकसित कर सकते हैं? चलिये देखते हैं कि अदिति की शिक्षक ने यह कैसे किया।

10 साल की अदिति मन में करने वाले गणित के सवालों में व्यस्त थी। 2×76 को हल करते वक़्त उसका उत्तर आया 432। उससे दोबारा करने के लिए कहा गया और दोबारा उसने 432 कहा। शिक्षक को समझ में आया कि अदिति ने 76×2 की बजाय 72×6 किया है। उन्होंने बताया कि कैसे उन्होंने सही उत्तर तक पहुंचने में अदिति की मदद की। उन्होंने अदिति से नीचे लिखे प्रश्न दिये हुये क्रम में पूछे:

2×100 कितना होता है? अदिति ने कहा 200

$2 \times 90 ? 180$

$2 \times 80 ? 160$

$2 \times 76 ?$ (कुछ क्षण रुकने के बाद) 432

$2 \times 70 ? 140$

$2 \times 80 ? 160$

$2 \times 76 ? 432$

$2 \times 100 ? 200$

$2 \times 200 ? 400$

$2 \times 76 ? 432$

अचानक अदिति रुकी, थोड़ा सोचा और बोली, "रुकिये। मुझे लगता है कुछ गड़बड़ है। मुझे करने दीजिए।" उसने कागज़ और पैन्सिल निकाली और गुणा करके निकाला कि 2×76 बराबर है 152 के, और फिर अपने आपसे बहुत खुश हुई।

इस स्थिति में खास बात यह है कि शिक्षक ने क्या नहीं किया।

- उन्होंने एकदम से अदिति को सही उत्तर नहीं बताया।
- उन्होंने अदिति से यह नहीं कहा कि उसने ग़लती की थी।
- उन्होंने उसे मूर्ख कहकर उसके अहम को चोट नहीं पहुंचायी।
- उन्होंने उसे धमकाया नहीं।
- उन्होंने कक्षा को उस पर हंसाया नहीं।

जो शिक्षक ने किया, वह था :

- उन्होंने अदिति से बात की।
- उन्होंने सोचा और पहचाना कि ग़लती क्यों हो रही है।
- उन्होंने एक ऐसा तरीका सोचा जो, उनके अनुसार, अदिति को अपनी ग़लती समझने में मदद करेगा।
- उन्होंने धैर्य रखा और अदिति को यह समझने में मदद के लिए कि उसके सवाल हल करने के तरीके में कुछ गड़बड़ है, उसे कई मौके दिए।
- उन्होंने अदिति को अवलोकन करने, सोचने, पैटर्न पहचानने और संबंध जोड़ने के लिए उत्साहित किया।

यानि कि शिक्षक सीखने के लिए एक अर्थपूर्ण माहौल बनाने की कोशिश कर रही थी।

अफ़सोस की बात है, कि बहुत सारे शिक्षक ऐसा नहीं करते हैं। जैसा कि हमने इकाई 2 में चर्चा की थी, गणित सिखाते वक़्त इस बात पर ज़्यादा जोर दिया जाता है कि बच्चे ऐल्गोरिद्म

को मशीनी ढंग से इस्तेमाल करना सीख लें। उन्हें यह समझने में मदद नहीं दी जाती कि ये ऐल्गोरिदम क्यों और कैसे काम करते हैं।

अब आपके लिए यह देखने का एक मौका कि आप कैसे एक बच्चे की पैटर्न पहचानने में मदद करेंगे।



चित्र 3: ठोस चीज़ों के इस्तेमाल से बच्चों को सीखने में मदद मिलती है।

E4) बहुत मेहनत के बाद 8 साल के हरि ने 2×88 का हल निकाला 176, जब उससे पूछा 2×89 कितना होगा तो बहुत मेहनत करके उसने उत्तर निकाला 178। आप कैसे उसकी यह समझने में मदद करेंगे कि उत्तर पाने का एक ज्यादा आसान तरीका है?

ज्यादातर बच्चे हरि की तरह होते हैं। उन्हें अवलोकन करने की, छानबीन करने की, संबंध पहचानने की और वे जो पैटर्न पाते हैं उनका व्यापकीकरण करने की ट्रेनिंग नहीं मिलती है। उनके लिए 2×88 वैसा ही एक "तथ्य" है जैसा कि 2×89 , जिसे पाने के लिए वे एकसा ही लंबा रास्ता अपनाते हैं। यह इसके बावजूद है कि बच्चे अपने आसपास के माहौल में पैटर्न पहचानते हैं और जिन चीज़ों से उनका वास्ता पड़ता है उनके बीच के संबंध भी देख पाते हैं। हम इस स्थिति को कैसे सुधार सकते हैं ?

असल में, गणित सिखाते वक़्त हमें बच्चों को पैटर्न ढूँढने और पहचानने में, उन पर गौर करके उनसे प्राप्त नियमों को समझ पाने में व अपने सोच में उनका इस्तेमाल करने के लिए प्रेरित करना है। तो चलिये, शुरू में, हम कुछ ऐसे तरीकों पर विचार करें जिससे हम गणित में पैटर्न पहचान पाने में बच्चों की मदद कर सकें। इसका एक अच्छा तरीका यह हो सकता है कि उन्हें ऐसे खेल खिलाए जाएं जिनमें वे चीज़ों को क्रम में लगा सकें। जब बच्चे, एक चीज़ के बाद दूसरी किसी क्रम में रखते हैं तो उनमें पैटर्न की समझ बनती है, व्यापकीकरण का एक अहसास बनता है। धीरे-धीरे उन्हें ऐसे खेलों में, जिनमें वे चीज़ों से खेलते हैं, ऐसे खेलों पर लाया जा सकता है जिनमें वे अपनी जानी पहचानी चीज़ों के चित्रों को क्रम में रखते हैं। ऐसे ही, धीरे-धीरे बच्चे संख्याओं में भी पैटर्न देखने लगेंगे। एक बार जब बच्चे पैटर्न पहचानने, समझने व बनाने लगेंगे तब वे हिसाब के सवालों में उनका इस्तेमाल भी कर सकेंगे।

यहां एक सावधानी! यह काफी नहीं है कि बच्चों को एक पैटर्न दिखा दिया जाए, जैसे गुणा में मान लीजिए, और फिर अगले विषय पर चले जाया जाए। बच्चों को खुद खोजने के लिए समय चाहिए ताकि वे जो पता लगा रहे हैं उसका अहसास उन्हें हो पाए। इसलिए नीचे लिखे अभ्यास को करते समय आपको इस बारे में भी सोचना पड़ेगा कि गतिविधियों को करने में कितना वक़्त लगेगा।

E5) ऐसी कुछ गतिविधियों/कामों/अभ्यासों की सूची बनाइये जो आप 50 बच्चों की एक कक्षा को देंगे जिससे कि पैटर्नों को ढूँढ़ें और पहचानें, और बता पाएं कि वे पैटर्न क्या हैं।

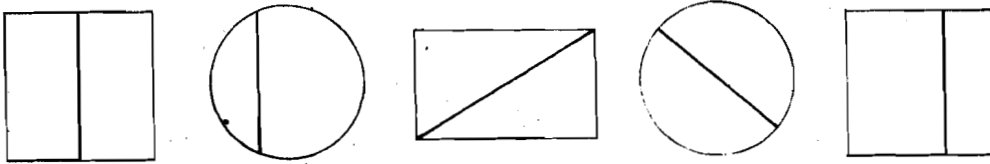
आप सोच रहे होंगे कि हमने गणितीय सोच के एक मूलभूत पहलू यानि कि विशेष से व्यापक व व्यापक से विशेष तक जाने की क्षमता के बारे में कुछ क्यों नहीं कहा है। एक बच्चे में यह क्षमता विकसित होने के लिए, एक अवस्था के बाद उसे औपचारिक गणित सीखना पड़ेगा। अमूर्त अवधारणाओं व प्रतीकों को आसानी से समझ पाने के लिए उसे किन प्रक्रियाओं से गुज़रना होगा? हम अगले भाग में इस पर चर्चा करेंगे।

3.4 अ—भा—चि—प्र

क्या इस भाग के शीर्षक ने आपको चक्कर में डाल दिया? इसी तरह बच्चे भी ऐसे नये प्रतीकों को समझ नहीं पाते जो पूरी तरह समझाए बिना उन पर थोप दिए जाते हैं। बच्चों में गणित की समझ बनाने के लिए आपको उन्हें सावधानी से बनाए गए क्रम में सीखने के अनुभव देने होंगे। कुछ भी और सीखने की तरह ही गणित भी एक निरंतर प्रक्रिया है। बच्चों को ठोस

अनुभवों से चित्रों, प्रतीकों व अमूर्त गतिविधियों की ओर जाने की ज़रूरत है। यानी, सीखने के अनुभवों का क्रम होना चाहिए :

- (अ) ठोस वस्तुओं के साथ अनुभव (जैसे, कंकड़, लकड़ियां या अन्य कोई भी आसानी से मिलने वाली चीज़ें);
 - (भा) बोलकर अनुभवों के बारे में बताना, यानि कि भाषा का उपयोग (जैसे, शब्द/कहानी सवालों के उपयोग से, खेलों से);
 - (चि) इस अनुभव को चित्रों द्वारा दिखाना (जैसे, मात्रा को चित्रों द्वारा दिखाना);
 - (प्र) अनुभव का लिखित प्रतीकों द्वारा व्यापकीकरण (जैसे, संख्यांक)।
- चलिये, यह मान कर कि कोई बच्ची पूर्ण संख्याओं से परिचित है, उसकी "आधे" की अवधारणा सीखने के संदर्भ में इस क्रम को देखें।
- (अ) वह अपनी रोटी/सैंडविच, या रंगीन कागज़ का एक टुकड़ा, या अन्य कोई भी ऐसी चीज़ों को आधे-आधे में बाँटती है। बाद में वह, मान लीजिये, 6 चीज़ों को दो समूहों में बाँटती है।
 - (भा) वह शब्द "आधे" को मात्रा से जोड़ने लगती है। आप ऐसे खेल बना सकते हैं जिससे वह अलग-अलग भिन्न संख्याओं के नामों से परिचित हो पाए।
 - (चि) आप चित्र 4 में दिखाए गए तरीके से उसे विभिन्न चित्र दिखा सकते हैं,



चित्र 4

और उससे बताने को कह सकते हैं कि किन चित्रों में रेखा चित्र को आधे में बाँटती है। बच्चों को इस तरह के कई अनुभव दिए जा सकते हैं (खंड 4 देखिए)।

- (प्र) इसके बाद वह "आधे" का प्रतीक लिखना सीखती है।

E6) क्या आप सीखने के क्रम अ—भा—चि—प्र की आवश्यकता से सहमत हैं? यदि नहीं, तो आप गणित की अवधारणाओं को ठीक से समझने के लिए कौन-सा दूसरा रास्ता सुझाएंगे?

इकाई 2 में आपने पढ़ा था कि प्राइमरी स्कूल में बच्चे मूर्त-सक्रियात्मक अवस्था में होते हैं। अपने सीखने वालों को अगली अवस्था तक बढ़ने में मदद देने के लिए आपको ठोस व औपचारिक के बीच की कड़ियों पर जोर देना होगा।

औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़ने की आवश्यकता है।

आपको शायद ऐसा लगे कि एक बार यदि बच्ची कोई विशेष अमूर्त अवधारणा या प्रक्रिया समझ गयी है तो उसके बाद उसे अन्य अवधारणाएं या प्रक्रियाएं समझने के लिए ठोस अनुभवों की ज़रूरत नहीं है। लेकिन ऐसा नहीं है। औपचारिक गणित या मन में हिसाब अच्छी तरह कर पाने के बावजूद भी बच्चों को अवधारणाओं, संक्रियाओं, सवालों, आदि को समझने के लिए वास्तविक चीज़ों और अनुभवों की ज़रूरत पड़ सकती है। उनके विकास का यह पेचदार (spiral) स्वरूप गणित सीखने की प्रक्रिया की विशेषता है।

गणित सीखने की प्रक्रिया एक लाइन में नहीं चलती है।

उदाहरण के लिए, जब दो अंकों वाली संख्याएं सिखायी जाती हैं उससे पहले बच्चों को "स्थानीय मान" समझने की ज़रूरत होती है। इसके लिए उन्हें समूह बनाने के ढेर सारे ठोस अनुभवों से गुज़रने की ज़रूरत होगी (इकाई 6 देखिये)। इससे उन्हें धीरे-धीरे "दहाई" और "इकाई" समझने में मदद मिलेगी। इसके बाद ये छोटी संख्याओं के औपचारिक गुणा और भाग करने के लिए तैयार हो जाएंगे। और फिर उनमें बड़ी संख्याओं के संदर्भ में "स्थानीय मान" की समझ विकसित करने के लिए फिर विभिन्न प्रकार के सीखने के ठोस अनुभवों से गुज़रने की ज़रूरत होगी।

इस तरह से, पहले छोटी संख्याओं और फिर बड़ी संख्याओं के संदर्भ में काम करने से बच्चों को अवधारणा की बेहतर समझ बनाने का मौका मिलता है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक बच्ची एक नई अवधारणा, जोड़ में क्रमविनिमयता, को समझने की कोशिश कर रही है। शुरू में, इतना काफी है कि वह इस गुण को छोटी संख्याओं, जिनसे वह पहले से ही परिचित है, के लिए ही समझ ले। अभी वह बड़ी संख्याओं से, जिनसे वह शायद उतनी परिचित न हो, क्यों जूझे?

हमने अभी जो चर्चा की है उसके बहुत सारे और उदाहरण आप नीचे दिए गए अभ्यासों को करते वक़्त सोच सकते हैं।

E7) क्या आप गणित के पाठ्यक्रम के पेचदार विकास के कुछ और उदाहरण दे सकते हैं?

E8) कक्षा 3 के एक बच्चे से $1/4 + 1/5$ जोड़ने को कहा गया। उसने $2/9$ लिखा। आपको क्या लगता है कि ऐसा क्यों हुआ? आप गलती ढूँढने व ठीक करने में उसकी मदद कैसे करेंगे?

E8 में सीखने वाले की मदद करने का एक तरीका है ऐसे इबारती सवालों का इस्तेमाल करना जिनका उसकी दुनिया से ताल्लुक हो। उदाहरण के लिये, यदि आप एक पूर्वस्कूली बच्चे को "दो" का अर्थ सिखाने की कोशिश कर रहे हैं, तो एक अच्छा तरीका होगा कि आप उसे "मुझे दो पेन्सिलें दो" जैसे कई सवाल दें। इस तरह के सवालों को हल करते हुए बच्ची अभ्यास करती है व धीरे-धीरे "दो" का अर्थ पूरी तरह से समझ लेती है। इसी तरह, "तुम्हारे पास पाँच पेन्सिल थीं, यदि मैंने तुम्हें बारह और दीं तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितनी पेन्सिलें हो जाएंगी?" की तरह के इबारती सवाल करने से बच्चे जोड़ की अवधारणा बनाते हैं।

दुर्भाग्यवश, इबारती सवाल आम तौर पर कक्षा 1 के अंत में कराए जाते हैं। यह शायद इसलिए है क्योंकि हममें से कई लोगों की यह गलत धारणा है कि इबारती सवाल ऐल्गोरिद्मों का अभ्यास कराने का एक तरीका है। बड़ों का तार्किक सोच तय करता है कि औपचारिक प्रतीकों को पहले सिखाना चाहिए। क्या आप इससे सहमत हैं?

E9) आपको क्या लगता है कि बच्चों को इबारती सवाल कब देने चाहिए—उनके औपचारिक ऐल्गोरिद्म में निपुण होने से पहले, या उसके बाद? आपके मत का कारण क्या है?

वैसे तो कोई भी पाठ्य पुस्तक ऐसे किसी एक स्तर से शुरू नहीं हो सकती जो हरेक बच्चे के लिए सही हो। यदि शिक्षक चाहते हैं कि वे गणितीय सोच व क्षमताओं की पक्की नींव बनाएं, तो यह महत्वपूर्ण है कि पूर्वस्कूली व प्राइमरी स्कूल के बच्चों के लिए वे पाठ्य पुस्तक के अलावा अन्य शिक्षण सामग्री का भी इस्तेमाल करें। वास्तव में, अपने आप में गतिविधियों पर आधारित एक पाठ्यक्रम दे देना ही काफी नहीं है। बेहतर यह होगा कि उसके साथ-साथ पाठ्य पुस्तक की जगह एक कार्यपुस्तक (workbook) का इस्तेमाल किया जाए, खास तौर से छोटे बच्चों के लिए।

इस भाग में, और इससे पहले, हम बार-बार यह सुझाव दे रहे हैं कि एक बच्चे को किसी भी अवधारणा को समझने के लिए उसे ठोस अनुभवों से शुरू करके अमूर्त स्तर तक, पहुँचने के लिए सीखने के अनुभव एक क्रम में देने चाहिये। मोटे तौर पर यही क्रम रख कर, इसमें थोड़ी बहुत तब्दीलियाँ की जा सकती हैं। और क्रम के हर चरण पर आपको यह जानना ज़रूरी है कि बच्ची को कितना समझ में आया है। इस समझ को आधार बनाते हुए ही आप आगे बढ़ें।

पाठ्यपुस्तकें व पाठ्यक्रम बड़ों के तर्क के अनुसार बनायी जाती हैं।

इस पूरे खंड में हम गणित के सीखने को मज़ेदार बनाने पर भी जोर देते आ रहे हैं। चलिए अब ऐसा करने का एक तरीका देखते हैं।

बच्चों को गणित सीखने में मदद

3.5 खेल-खेल में सीखना

बच्चे गणित की कई बुनियादी अवधारणाएं खेलों से सीख सकते हैं। उन्हें जाने पहचाने संदर्भों में खेलने में मज़ा आता है। उनके खेलों से, अपने आप ही, मज़े-मज़े में, बहुत सारी गणितीय गतिविधियां आ जाती हैं। नए विचारों और अवधारणाओं से छोटे बच्चों का परिचय खेलों व ऐसी परिचित स्थितियों से कराया जा सकता है, जो उन्हें मज़ेदार लगे और जिनसे उन्हें घबराहट या परेशानी न हो। यही बात प्राइमरी के बड़े बच्चों के लिए भी लागू होती है।

जब छोटे बच्चे चीजों को आपस में बांटते हैं वास्तव में वे एक-से-एक का मेल (match) मिलाते हैं। जब वे गुटकों से खेलते हैं तो वे अलग-अलग आकारों से प्रयोग कर रहे होते हैं। जब वे “पाँच छोटे बंदर” जैसा गाना गाते हैं तो वे संख्याओं के नाम सीखते हैं।

बच्चों को इबारती खेलों में भी मज़ा आता है। वे आम तौर पर शब्दों के पैटर्न पकड़ने में तेज़ होते हैं। क्योंकि पैटर्न पहचानना गणितीय सोच का मूलभूत पहलू है, बच्चे अपनी भाषा विकसित करने के साथ-साथ वास्तव में गणित भी कर रहे होते हैं।

आप कोई भी गणितीय अवधारणा सिखाने के लिए ढेरों खेल बना सकते हैं। ये खेल या तो पूरी कक्षा के साथ खेले जा सकते हैं, या छोटे समूहों में। खेल ऐसे भी बनाए जा सकते हैं जिनसे बच्चे संबंधित गणितीय भाषा भी साथ ही सीख जाएं।

यहां टीम में खेले जाने वाले कुछ खेलों के उदाहरण दिए जा रहे हैं। टीम छोटी (1-3 बच्चे) या बड़ी (15-20 बच्चे) हो सकती है। हम छोटे बच्चों के कुछ खेलों से शुरू करते हैं।

क) एक टीम अपने सामने कुछ कंकड़ रख लेती है। दूसरी टीम :

पहला खेल - उतने ही कंकड़ रखे, या

दूसरा खेल - गिने और बताए कि वे कितने हैं, या

तीसरा खेल - 14 कंकड़ (मान लीजिए) करने के लिए जितने भी कंकड़ और चाहिए उतने रखें, या

चौथा खेल - 3 कंकड़ छोड़ कर बाकी उठा ले, आदि।

जैसे-जैसे खेल आगे बढ़ता है आप उन्हें संख्याओं के नाम भी सिखा सकते हैं।

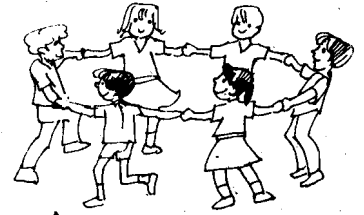
ख) एक टीम दो पासे (बिन्दु या संख्याओं वाले) फेंके और कंकड़ों के ढेर में से उतने कंकड़ उठा ले जितना कि दोनों पासों की संख्याओं का जोड़ हो (या अंतर हो, या गुणा हो)। दूसरी टीम भी ऐसा ही करे। दो बारियों के बाद जिसके पास भी ज़्यादा कंकड़ होंगे वह जीत जाएगा।

यहां भी, खेल के दौरान बच्चे “छः जोड़ दो बराबर आठ” जैसी भाषा से ज़्यादा परिचित हो सकते हैं।

ग) कंकड़ों, पासों, टहनियों, कार्डों या मोतियों से आप “स्थानीय मान” सिखाने के लिए खेल बना सकते हैं। 10 कंकड़ों (10 के आधार के लिए) को एक कार्ड या एक मोती के बराबर मान कर, अदला-बदली की जा सकती है और इसका लेखा-जोखा रखा जा सकता है। एक बार जब वे दहाइयों और इकाइयों की पकड़ ठोस चीजों से बना लेते हैं तो उन्हें संख्याओं का इस्तेमाल करने वाले खेलों से भी परिचित करवाया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, आप 10-10 कार्डों के दो समूह ले सकते हैं जिन पर 0 से 9 तक के संख्यांक लिखे हों। इन्हें बच्चों की दो टीमों इस्तेमाल करेगी। बच्चे कार्डों को फेंक कर

गणितीय अवधारणाओं को खेलों से सिखाया जा सकता है।



चित्र 5 : बच्चे खेल-खेल में गणितीय आकारों के बारे में सीख सकते हैं।

और उल्टे करके टेबल पर रख दें। फिर वे बारी-बारी से, एक बार में एक कार्ड चुनेंगे और उसे बोर्ड पर “इकाई” या “दहाई” के स्तम्भ में रखेंगे। एक कार्ड जहाँ रखा जा चुका है वहाँ से हटाया नहीं जा सकता। उद्देश्य सबसे बड़ी संख्या बनाना है। वे जो भी नम्बर बनाएं उसे जोर से कह दें। उदाहरण के लिए, यदि पहले समूह का संख्या 3 का कार्ड खुला और उसे उन्होंने दहाई के स्तम्भ में रखा, तो उन्हें जोर से 30 कहना चाहिए, वगैरह।

यह खेल कार्डों की जगह दो पासों से भी खेला जा सकता है।

आप नीचे दिया हुआ अभ्यास करते वक़्त कई तरह के और खेल सोच सकते हैं।

E10) बच्चों को निम्नलिखित अवधारणा/कौशल सिखाने के लिए एक-एक खेल का उदाहरण लिखें।

- i) गुणा,
- ii) एक वृत्त क्या होता है,
- iii) अन्दाज़ लगाने की क्षमता

यह भी बताएं कि इन अवधारणाओं या कौशलों को सिखाए जाने से पहले आपके हिसाब से बच्चों को क्या आना चाहिए।

नीचे हमने अटकलबाज़ी के कुछ खेलों के उदाहरण दिए हैं। इनसे बच्चों को अपने गणितीय सोच और भाषा का विकास करने के बहुत से मौक़े मिलते हैं। आप भी ऐसे कई तरह के खेल सोच सकते हैं।

- (क) एक टीम एक संख्या सोच ले और शिक्षक के कान में बता दे। दूसरी टीम को यह संख्या बतानी है। संख्या का अन्दाज़ लगाने के लिए उन्हें कुछ संकेत दिया जाएगा जैसे: “यह संख्या पाँच और नौ के बीच की एक अभाज्य (prime) संख्या है”, या “यह इस कक्षा की 90% लड़कियों का 2/5वां हिस्सा है”। क्योंकि बच्चे प्रश्न बना रहे हैं, इसलिए वे उनके स्तर पर ही निर्भर करेंगे।
- (ख) एक और खेल में कक्षा के सामने जानी पहचानी चीज़ों का एक ढेर रख दिया जाए। एक टीम या बच्चे (आप जैसे भी खेल खिलाना चाहें) से किसी एक चीज़ को चुनने व उसका नाम शिक्षक के कान में कह देने के लिए कहा जाए। दूसरे बच्चे/समूह बारी-बारी से चुनी हुई चीज़ का अन्दाज़ लगाएं जिसके लिए वे उसके माप, आकार या दूसरी चीज़ों के सापेक्ष वस्तु का स्थान जैसे संकेतों को आधार बनाएं। जैसे, यह ज़्यादा लम्बी है, ज़्यादा भारी है, सामने रखी है, यह गोल नहीं है, आदि-आदि।
- (ग) आप अटकलबाज़ी से ऐसे खेलों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें अन्दाज़ लगाने वाले कुछ ऐसे सवाल ही पूछ सकते हैं जिनके उत्तर “हाँ” या “नहीं” में ही हों। ऐसे खेल बच्चों को विशिष्ट सवालों से (क्या वह दरवाज़ा है? किताब है?) ज़्यादा व्यापक सवालों (क्या उस पर बैठ सकते हैं? क्या वह मेरे जितना बड़ा है? क्या कमरे में एक से ज़्यादा हैं?) की ओर बढ़ने का मौक़ा देते हैं। इससे उत्तर तक पहुँचने के लिए ज़रूरी प्रश्नों की संख्या कम हो सकती है। जैसे, मान लीजिये कि चुनी हुई चीज़ 1 से 100 के बीच की संख्या है। शुरू में, शायद बच्चे अलग-अलग संख्याएँ लेकर पूछें कि क्या वह 4 है, या 26 है, वगैरह। कुछ समय के बाद वे पूछना सीख जाएंगे कि “क्या वह 4 से बड़ी है?” “क्या वह सम संख्या है?”, आदि। बाकी बच्चे भी इस तरीक़े को जल्दी पकड़ लेंगे। या, मान लीजिये, चुनी हुई वस्तु एक बेलनाकार डिब्बा है। तब प्रश्नों में गणित की शब्दावली आ जाएगी जैसे—क्या वह गोलाकार है?, क्या वह किसी रेखा के प्रति सममित है?, क्या उसमें 4 कोण हैं?

गणितीय सोच से संबंधित कई कुशलताएँ विकसित करने के लिए खेलों का उपयोग किया जा सकता है।

बेहतर सवाल बनाना गणितीय सोच के विकास का हिस्सा है।

ऐसे खेल बच्चों की व्यापकीकरण करने, विशिष्टीकरण करने, अन्दाज़ लगाने व पैटर्न पहचानने की क्षमताएं विकसित करके उनके गणितीय सोच का विकास करते हैं। यानि कि, ये सब उनकी गणितीय सोच व तार्किक क्षमता बढ़ाते हैं।

और बच्चों में गणित की समझ बढ़ाने के लिए सामूहिक नृत्य और खेल-कूद की गतिविधियों, वगैरह के इस्तेमाल के बारे में आप क्या सोचते हैं? अब आप ही ऐसे कुछ उदाहरण दीजिए।

E11) बच्चों को समय के अन्तराल की अवधारणा से परिचित कराने के लिए अटकलबाजी का एक खेल बनाएँ।

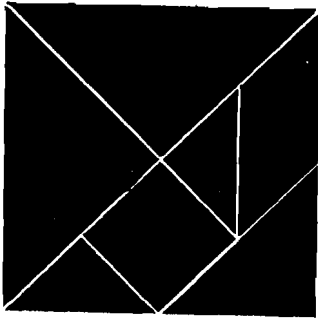
E12) आप ज्यामिति की अवधारणाएँ सिखाने के लिए सामूहिक नृत्य का उपयोग कैसे करेंगे?



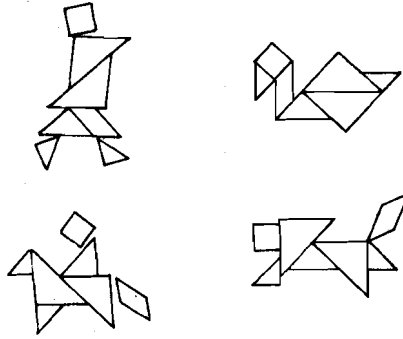
चित्र 6 : बच्चे गणितीय कुशलताएँ ओरीगामी से सीख सकते हैं।

बहुत सारी अन्य मजेदार गतिविधियों का उपयोग बच्चों को ज्यामिति की विभिन्न अवधारणाओं से परिचित कराने के लिए किया जा सकता है। जैसे, बच्चे सममिति (symmetry) के बारे में "रंगोली" के सममित (symmetrical) पैटर्न कागज़ पर बना कर सीख सकते हैं।

ओरीगामी, यानि कागज़ मोड़ने की कला, के द्वारा अलग-अलग दो व तीन-आयामी आकारों से उनका परिचय कराया जा सकता है। सिखाते वक़्त, हर कदम पर शिक्षक गणित की शब्दावली पर ज़ोर दे सकती है जैसे, "अब कागज़ को मोड़कर आधा करो", "फिर मोड़कर इससे एक वर्ग बनाओ", "जब तुम इस कोने को इस तरह से मोड़ोगे (दिखाकर), यह एक त्रिभुज बन जाएगा।" टैनग्राम का इस्तेमाल भी इसी उद्देश्य के लिए किया जा सकता है।



(क)



(ख)

चित्र 7 : (क) एक टैनग्राम, (ख) टैनग्राम से बने कुछ आकार

अभी तक हमने ठोस से अमूर्त की ओर बढ़ना, ठोस विधि पर खूब समय लगाना, और गणित पढ़ाने के लिए मजेदार गतिविधियों का इस्तेमाल करना—इन बातों के महत्व पर ज़ोर दिया। सीखने का माहौल बनाने के लिए यह सब काफी नहीं है। अगले खंड में हम इसके कुछ और पहलुओं पर चर्चा करेंगे।

3.6 सीखने में मददगार अन्य तरीके

इस खंड में हम खास ध्यान तीन बातों पर देंगे—दोहराव की ज़रूरत, दूसरे बच्चों से सीखना और गलतियों का इस्तेमाल करके सीखना।

3.6.1 ज़रूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो

बहुत छोटी उम्र से ही बच्चे कई बातों को दोहराते हैं और इससे सीखते हैं, जैसे, चीज़ें गिराना व उठाना, डिब्बे और टीन खोलना और बन्द करना, कुछ शब्दों को बार-बार दोहराना, ताक-झाँक का खेल बार-बार खेलना, बड़ों से बार-बार कहानियाँ दोहराने को कहना, आदि। क्या आप इनमें से किसी भी काम को रट कर सीखना कहेंगे? यानि कि,

दोहराव से, न कि रटने से, बच्चों को सीखने में मदद मिलती है।

दोहराने के ऐसे कई नए तरीके सोचे जा सकते हैं, जिनसे कि वह मजेदार बनाया जा सके। इसे बच्चे मजेदार गतिविधियों के द्वारा कर सकते हैं, जिनमें से कुछ की शुरुआत वे खुद भी कर सकते हैं। इन दोहरावों के दौरान भाग लेने वाले बच्चे हर बार कुछ नया व फर्क देखते और अनुभव करते हैं।

दूसरी तरफ, रट कर सीखने में इस तरह की विभिन्नता नहीं होती क्योंकि उसमें प्रक्रिया का दोहराव नहीं होता, बल्कि “जानकारी” ही मशीनी तरीके से दोहराई जाती है (उदाहरण के लिए, पहाड़े मशीनी तरीके से रट कर याद करना)।

अगर आप आस-पास देखें तो आप पाएंगे कि किसी भी बच्चे के माहौल में दोहराव स्वाभाविक तौर पर अलग-अलग रूपों में होता है। लेकिन सीखने के औपचारिक माहौल में, बच्चों की रुचि बनाए रखने के लिए, दोहराव को काफी विविधता के साथ जानबूझ कर लाना पड़ता है। आप इस चुनौती को कैसे पूरा करेंगे? शायद नीचे दिया गया उदाहरण हमें कुछ विचार दे।

बच्चे आम तौर पर पहाड़ों से बहुत परेशान रहते हैं। क्या यह सचमुच जरूरी है कि उन्हें मशीनी तरीके से बार-बार दोहराया जाए? और क्या इस तरह रटकर याद करने से बच्चे को पहाड़ों को समझने में मदद मिलती है? क्या यह सच नहीं है कि एक दिए हुए क्रम में पहाड़ों को सिर्फ रटने से उनकी समझ एक सतही स्तर तक ही रह जाती है? बच्चे इनको आसानी से इस्तेमाल कर ही नहीं पाते। यह बात साफ नजर आती है जब आप किसी और क्रम में उनसे गुणज (multiples) पूछें। क्या यह बेहतर नहीं है कि किसी बात को सिर्फ रटवाने की बजाय बच्चे को उसमें शामिल पैटर्न पहचानने में मदद की जाए? बच्चों के दिमाग में गुणज की समझ बैठाने के लिए और पहाड़ों में शामिल पैटर्नों को पहचानने की क्षमता विकसित करने के लिए आप कई गतिविधियां सोच सकते हैं। उदाहरण के लिए, बच्चों से दो-दो, चार-चार, पांच-पांच सेबों के समूह को पहचानने के लिए कहा जा सकता है। और फिर उनसे “चार-चार सेबों वाले कितने समूह हैं?”, “ये कुल कितने सेब हुए?” जैसे सरल सवाल पूछे जा सकते हैं। और इस तरह की गतिविधि तरह-तरह की चीजों से की जा सकती है।

नीचे दिया गया अभ्यास करते वक़्त आप इस तरह की कुछ और गतिविधियां सोच सकते हैं।

E13) आप बच्चों की पाँच-पाँच और दस-दस के समूह बनाने में मदद के लिए कक्षा में की जाने वाली किस तरह की गतिविधियाँ सोच सकते हैं?

हमने खंड 3 में उन गतिविधियों की चर्चा की है जिनसे बच्चों को गुणा समझने में मदद मिल सकती है।

जब उनको इस तरह की गतिविधियों का काफी अभ्यास हो जाए, तब वे जो कर रहे हैं उसे गणितीय भाषा में लिखने के लिए उनकी मदद की जा सकती है। जैसे, वे दो-दो सेबों वाले 4 समूहों को $4 \times 2 = 8$ लिख सकते हैं। इसे चित्र द्वारा भी दिखा सकते हैं।

अब बच्चे पहाड़ों में मजे से पैटर्न ढूँढ पाने की स्थिति में होंगे। आप उनसे 10×10 की ग्रिड, जैसे कि नीचे E14 में दी गयी है, पूरा करने को कह सकते हैं। हर खाने में बच्चे को खाने की लाइन की संख्या और उसकी स्तम्भ की संख्या का गुणनफल भरना होगा।

इस तरह की गतिविधि कुछ लम्बे समय तक की जा सकती है। बच्चों को या तो उतना समय दिया जा सकता है जितना उनको चाहिये या जितने समय तक उनकी रुचि गतिविधि में बनी रहे। उन्हें आपस में बात करने दें और पैटर्न खुद ही खोजने दें।

यहां दो संबंधित अभ्यास आपके लिए।

E14) यह देखने की कोशिश कीजिए कि अलग-अलग बच्चे किस क्रम में संख्याएं ग्रिड में भरते हैं। मेरा दावा है कि सभी बच्चे पहले एक, पाँच और 10 के सारे गुणनफल भरेंगे। आप मेरे इस दावे की जांच कीजिए। क्या आपको इस दावे को गलत साबित करने वाला कोई प्रमाण मिला।

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4						24				
5										
6										
7										
8										
9										
10										

E15) क्या दोहराव के द्वारा बच्चों की समय की अवधारणा समझने में मदद की जा सकती है? इसके लिए एक ऐसी गतिविधि को विस्तार से लिखकर बताइए जो पाँच बच्चों के एक समूह को दी जा सके।

दोहराव रुचिकर व अलग-अलग तरीकों से होना चाहिये ताकि बच्चों की सीखने में रुचि बनी रहे।

हमने इकाई 2 में कहा था कि बच्चे बिना दबाव वाले माहौल में सबसे बेहतर सीखते हैं। अब हम ऐसे माहौल बनाने के एक तरीके पर बात करेंगे।

3.6.2 बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं

एक दिन मैं पास के ही एक स्कूल में, शिक्षक और बच्चों के बीच किस तरह की परस्पर क्रिया होती है, यह देखने गयी थी। बच्चों को उनकी शिक्षक ने एक सवाल दिया हुआ था, और वे अपनी कॉपी में उसे हल करने में लगे हुए थे। शिक्षक बच्चों के बीच घूम रही थीं और रुक-रुक कर उनसे पूछ रही थीं कि कोई एक जवाब उन्होंने कैसे निकाला। ऐसा करने पर अधिकतर बच्चों ने अपना लिखा हुआ हल मिटा दिया, चाहे वह सही था या गलत। आपने भी ऐसा व्यवहार देखा होगा। इससे क्या पता चलता है? क्या यह सवाल हल करने की अपनी क्षमता के बारे में आत्मविश्वास की कमी नहीं दिखाता है? आत्मविश्वास की यह कमी बड़ों में भी होती है जब उनका किसी विशेषज्ञ से सामना होता है।

जिन बच्चों में सोचने की अपनी क्षमता पर भरोसा नहीं होता, उन्हें बाद में इस क्षमता को विकसित करने में दिक्कत होगी। इसलिए यह ज़रूरी है कि सीखने का माहौल ऐसा बनाया जाए जिससे बच्चों का आत्मविश्वास बढ़े।

लेकिन यह हम कैसे कर सकते हैं? यदि समूहों में खेलते हुए बच्चों को आप ध्यान से देखें तो आपको शायद कुछ संकेत मिल जाए। बच्चे जब एक साथ खेलते हैं तो वे एक दूसरे की सोच जाँचते रहते हैं। खेलों व गतिविधियों से बच्चों को एक दूसरे से, बिना किसी डर के, एक आज़ाद और खुले माहौल में मेल-जोल का मौका मिलता है। ऐसे मेल-जोल के दौरान बच्चे अपनी बातों को एक दूसरे के सामने जवाबों और सुझावों के तौर पर रखते हैं। एक बच्चे के लिए दूसरे की बात की अहमियत इतनी ही होती है कि वह एक राय होती है जिसे जाँच कर माना भी जा सकता है, या नहीं भी।

दूसरी तरफ, कोई बड़ा, आम तौर पर बच्चों के सामने अपना मत एक "सच्चाई" के रूप में रखता है, जिसे बिना किसी सवाल या शक के मानना पड़ता है। यदि बड़े के कथन को बच्ची शक से देखे या सोच में पड़ जाए, तो बड़ा अपने कथन को दोहराता है, पहले धीरज से, फिर चिड़चिड़ाकर, और अन्त में, गुस्से से। अंतिम निष्कर्ष होता है, "मूर्ख! तुम यह भी नहीं समझ सकते!" बच्ची, जो पहले से ही यह समझती है कि वह बड़े के सामने कुछ भी नहीं है अपने बारे में यह राय मान लेती है, और उसका आत्मविश्वास कम होने लगता है।

इसीलिए, सीखने के लिए, बिना डर के आपसी मेल-जोल होना बहुत ज़रूरी है। इस तरह का मेल-जोल अन्य कारणों से भी महत्वपूर्ण है। हम आपसे नीचे दिए गए अभ्यास में उनके बारे में सोचने को कह रहे हैं।

E16) क्या आप बच्चों के आपसी मेल-जोल और एक दूसरे से सीखने के और फायदे सोच सकते हैं?

यदि आप इससे सहमत हैं कि बच्चे एक-दूसरे से बहुत कुछ सीखते हैं, तो हम उन्हें ज़्यादा से ज़्यादा ऐसे मौके किस तरह दे सकते हैं? महत्वपूर्ण बात यह है कि ऐसी परस्पर क्रियाएँ अनौपचारिक हों, मज़ेदार हों और बिना किसी डर के हों। एक बच्चे से सिर्फ़ यह कह देना कि, “तुम अपने पड़ोसी/दोस्त/भाई/बहन को पढ़ा दो” आम तौर पर कारगर नहीं होता। यह इसलिए क्योंकि तब बाल-शिक्षक बड़ों की नक़ल करने की कोशिश करता है, और सीखने वाला उतना ही घबरा जाता है जितना कि बड़े से।

बच्चे एक दूसरे से सीख पाएँ ऐसी स्वाभाविक और कुछ निकलने लायक परिस्थिति बना पाना आसान नहीं है। शायद, बच्चों को बिना उनकी जानकारी के, स्वाभाविक तरह से मिलते-जुलते, खेलते, बात करते हुए देखना चाहिये। इससे शायद हमें कुछ तरीका समझ में आए कि कक्षा में ऐसी स्थितियाँ कैसे बनाई जा सकती हैं कि बच्चे एक दूसरे से सीख सकें।

इससे संबंधित एक अभ्यास आपके लिए पेश है।

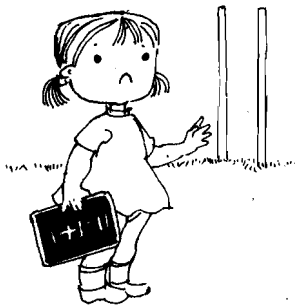
E17) कुछ बच्चों की स्वाभाविक परस्पर क्रिया को देखने के बाद, इसकी वे विशेषताएँ लिखिये, जिनके कारण बच्चों का एक-दूसरे से सीखने का तरीका, अन्य तरीकों से बेहतर साबित होता है।

एक और बात है जो हम बड़ों को सीखने का बेहतर माहौल बनाने के दौरान ध्यान में रखनी चाहिए। हमने इसकी तरफ़ संकेत भाग 3.3 में भी दिया था। उसके बारे में हम अब चर्चा करेंगे।

3.6.3 गलतियाँ उपयोगी होती हैं

बच्चों को पढ़ाने के दौरान आपने पाया होगा कि बच्चे तमाम गलतियाँ करते हैं। गलतियाँ होने पर आप क्या करते हैं? इनसे आपको बच्चे के बारे में क्या पता चलता है—सीखने में असफलता, या समझने की एक कोशिश? या दोनों? यदि ऐसा है, तो आप इन दोनों में अंतर कैसे करते हैं और कैसे तय करते हैं कि किसी खास परिस्थिति में क्या है?

बच्चों की गलतियाँ उनकी सीखने की प्रक्रिया का स्वाभाविक और ज़रूरी हिस्सा है। नई अवधारणाओं को समझने की प्रक्रिया में बच्चे अपनी अभी तक की समझ को लागू करते हैं। हो सकता है कि यह औपचारिक शिक्षण के तरीके व विषयवस्तु से मेल न खाएँ। सुमित (भाग 3.3 में) इसका एक उदाहरण है।



चित्र 8 : बच्चों की गलतियाँ उनकी दुनिया में झांकने का यौक्य देती हैं।

बच्चों की गलतियों से यह भी पता चलता है कि बच्चे कैसे सोचते और सीखते हैं। जैसे, 51 के लिए 15 लिखना हमें यह बताता है कि बच्ची अभी भी स्थानीय मान की अवधारणा समझ नहीं पाई है, और उसे समूह बनाने का और अभ्यास करने की ज़रूरत है।

बच्चों की गलती को इस तरह से ध्यान से देखने से शिक्षक को सीखने वाले का गणितीय सोच विकसित करने में बहुत मदद मिल सकती है। गलतियाँ करना और उनसे सीखना एक पक्की समझ बनाने की प्रक्रिया का हिस्सा है। बल्कि, यह सही उत्तर निकालने से ज़्यादा महत्वपूर्ण है। दुर्भाग्यवश, परम्परागत शिक्षक अभी भी यही मानते हैं कि सीखना केवल तभी होता है जब सही उत्तर दिए जाएँ।

गलतियों का विश्लेषण शिक्षक के लिए मददगार होता है।

E18) एक पांचवीं की बच्ची "3 + - = -3/2" में रिक्त स्थान में 9/2 भरती है। आपके हिसाब से यह गलती क्यों हुई? आप इस स्थिति को कैसे सुधारेंगे?

इसके साथ ही हम अपनी इस चर्चा के अंत में पहुंच गए हैं कि बच्चों के लिए सीखने का अच्छा माहौल किन-किन तरीकों से बनाया जा सकता है। चलिए अब संक्षेप में देख लें कि हमने इस इकाई में क्या चर्चा की है।

3.7 सारांश

इस इकाई में हमने मुख्य रूप से इस बात पर चर्चा की है कि प्राइमरी स्कूल के बच्चों के लिए गणित सीखना किस प्रकार ज़्यादा अर्थपूर्ण बनाया जा सकता है। इसके लिए हमने कई उदाहरण दिए हैं यह दिखाने के लिए कि बच्चे कैसे सीखते हैं और हम कैसे उनके लिए उचित खेल और गतिविधियां बना सकते हैं। हमने उदाहरणों से यह दिखाया है कि गणित सीखने की प्रक्रिया का बच्चों के सोचने के ढंग से गहरा संबंध है। हमने खास तौर पर नीचे दिए गए मुद्दों पर जोर दिया है।

- 1) बच्चे मानसिक समझ के निश्चित स्तर और जानकारी के साथ आपके पास आते हैं। आपको इसे आधार मानकर आगे बढ़ने की ज़रूरत है।
- 2) गणितीय सोच से संबंधित कुशलताओं, जैसे संबंध बनाना, विशिष्टीकरण और व्यापकीकरण करना, परिकल्पना बनाना और उसे सिद्ध करना या उसका खंडन करना, को विकसित करने में बच्चों की मदद करनी चाहिए।
- 3) ठोस चीजों का इस्तेमाल करते हुए औपचारिक गणित को बच्चों की सहज समझ से जोड़ना चाहिए।
- 4) एक बच्चे को गणित पढ़ाते समय हमें सीखने के अनुभवों को बच्चे के विकास के स्तर के अनुसार क्रमवार करना चाहिए, न कि केवल विषयवस्तु के अनुसार। मोटे तौर पर यह क्रम इस प्रकार है:

अनुभव — भाषा — चित्र से दिखाना — प्रतीक

- 5) किसी भी नई अवधारणा की अच्छी समझ बनाने के लिए दोहराव ज़रूरी है। दोहराव को आप रुचिकर बना सकते हैं। दोहराव और रटना एक ही बात नहीं है।
- 6) बच्चे अपने साथ के बच्चों से आसानी से सीखते हैं क्योंकि आम तौर पर वे एक दूसरे से डरते नहीं हैं।
- 7) बच्चों की गलतियों का विश्लेषण करना व पढ़ाने में उनका उपयोग करना ज़रूरी है।

3.8 अभ्यासों पर टिप्पणियां

- E1) बच्चों की पहली भाषा, भाषा की क्षमता और माता-पिता की शिक्षा के स्तर में फर्क हो सकता है। इनके अलावा आप कई और ऐसे फर्क लिख सकते हैं।
- E2) बच्चे कितना जानते हैं इसका अन्दाज़ लगाने की कोई कोशिश नहीं हुई। क्या उनको "स्थान" और "स्थानीय मान" की समझ थी? क्या वे 3 अंकों की संख्याएं लिख सके? क्या वे 100 से कम संख्याओं को लिख पाए? बड़ी संख्याएं (यानि, 3 या ज़्यादा अंकों

वाली) कोई भी ठोस चीजों से नहीं सिखा सकता। क्या बच्चे औपचारिक तरीके के लिए तैयार थे? इस अभ्यास में दी गई स्थिति पर चर्चा करने के दौरान, इन जैसे बहुत सारे अन्य प्रश्नों पर विचार करना ज़रूरी है।

E3) (क) इस विषय पर हमने खंड 5 में चर्चा की है।

(ख) आपको यह देखना होगा कि इनसे बच्चों की परिकल्पना बनाने की, उसका परीक्षण करने की, ज़रूरत पड़ने पर परिकल्पना बदलने की, अपने अवलोकनों से व्यापकीकरण करने की कोशिश की क्षमता कैसे बेहतर हुई।

E4) उसे शुरू में, ठोस चीजों व छोटी संख्याओं से यह देखने के लिए बढ़ावा दिया जाए कि गुणा करना वास्तव में जोड़ने की प्रक्रिया को ही बार-बार दोहराना है। एक बार वह यह समझ जाए तो उसे पता चलेगा कि 2×89 , वास्तव में $2 \times 88 + 2$ ही है।

E5) मान लीजिए आप कक्षा को पांच-पांच के समूहों में बांट लेते हैं। फिर, आप कुछ चीजों को (जैसे टहनियों, या कंकड़ों, या बटनों को) किसी तरह क्रमवार रख सकते हैं, और हर समूह से पैटर्न ढूँढने व आपके जमाए पैटर्न को आगे बढ़ाने को कहा जा सकता है।

यदि बच्चों की चित्रों से काम करने की समझ है, तो आप विभिन्न समूहों को चित्रों के कार्ड बांट सकते हैं। इनसे पैटर्न बनाने या एक समूह द्वारा शुरू किए गए पैटर्न को दूसरे समूह द्वारा जारी रखने को कहा जा सकता है, इत्यादि।

यदि आप बच्चों को गुणा (या भाग) पढ़ा रहे हैं, तो आप बोर्ड पर अन्दाज़ लगाने के ऐसे खेल विकसित कर सकते हैं जिनसे वे सभी साथ-साथ गुणा और जोड़ (या भाग और घटा) के बीच के संबंध को पहचान सकें।

E7) उदाहरण के लिए, बच्चे लम्बाई और क्षेत्रफल नापना कैसे सीखते हैं। आप जब खंड 5 पढ़ेंगे, तो आप देखेंगे कि एक बच्चे को पहले लम्बाई मापने से संबंधित ठोस अनुभवों की ज़रूरत होगी। धीरे-धीरे उसे मानक इकाइयों की ज़रूरत महसूस होगी, और फिर लम्बाई की अमूर्त अवधारणा को समझने लगेगी। फिर, आगे बढ़कर, क्षेत्रफल नापने के दौरान, आपको फिर से उसे ठोस अनुभव देने होंगे, खास तौर से यह दिखाने के लिए कि क्षेत्रफल नापने के लिए अलग तरह की इकाई की ज़रूरत क्यों होती है। इसी तरह, चीजों के आयतन के विषय में सीखते हुए, उसे दोबारा अपनी लम्बाई और क्षेत्रफल की समझ को याद कराना होगा।

E8) साफ है कि बच्ची ने मशीनी तरीके से एक ऐल्गोरिद्म को करने की कोशिश की थी जो शिक्षक ने उसके दिमाग में ढूँसा था। क्योंकि उसे यह नहीं मालूम था कि नियम कैसे काम करता है, उसे नियम याद रखना मुश्किल लगा। इसलिए, उसने यह किया जो उसे सही लगा—अंश, अंशों का जोड़ है, और हर, हरों का जोड़।

और ज़्यादा विवरण के लिए आप खंड 4 को देख सकते हैं।

E9) हमारे अनुसार, उन कारणों की वजह से जिन्हें हमने E9 के पहले के पाठ में बताया है, सीखने के ठोस अनुभवों का एक हिस्सा होना चाहिए ठीक तरह से बनाये गये इबारती सवाल।

E10) आप (i) का विवरण खंड 3 में, (ii) का खंड 5 में और (iii) का खंड 3 व 5 में पा सकते हैं।

E11) आप विवरण के लिए खंड 5 देख सकते हैं।

E12) बच्चे विभिन्न दो-आयामी आकारों से संबंधित गाने गा सकते हैं। वे जब किमी आकार का नाम लेंगे, जैसे वृत्त, वे एक दूसरे के हाथ पकड़कर एक वृत्त बना सकते हैं। आगे, यदि वे एक त्रिभुज के बारे में गाएँ, तो वे एक त्रिभुज का आकार बनाएंगे, इत्यादि। यह सब लय में किया जा सकता है।

E13) कक्षा एक के बच्चों से स्कूल आते समय खूब सारे कंकड़ (या पत्ते, या डंडियां) उठा कर लाने को कहा जा सकता है। फिर उनसे इन चीजों को इस प्रकार समूहों में रखने को कहा जा सकता है जिससे हर समूह में उतने ही कंकड़/पत्ते/डंडियां हों जितनी कि एक हाथ की उंगलियां हैं। ऐसा लगता है कि बहुत छोटे बच्चे जानते हैं कि “पांच” का अर्थ एक हाथ की उंगलियों की संख्या होता है। इस तरह की मेल बिठाने की गतिविधि से वे पांच के समूह बना सकते हैं। यह गतिविधि विविध प्रकार की चीजों के साथ की जा सकती है।

ज्यादा बड़े बच्चे गिनकर दस-दस समूह बना सकते हैं। उन्हें हर समूह पर एक झण्डी लगाने के लिए रंगीन कागज़ दिया जा सकता है। और बच्चे ऐसे खेल खेल सकते हैं जिनमें बंडलों का इस्तेमाल स्थानीय मान की अवधारणा या 10 की गुणा सिखाने के लिए किया जा सकता है।

E15) संबंधित चर्चा के लिए आप खंड 5 देख सकते हैं।

E16) यह उनकी खुद सोचने की क्षमता, बिना किसी बड़े के सहारे की ज़रूरत के, विकसित करने में मदद दे सकता है। यह उनके आलोचनात्मक तरीके से सोचने की क्षमता के विकास के लिए भी ज़रूरी है।

बच्चे अपने आपसी मेल-जोल से यह भी देख सकते हैं कि वे एक दूसरे की तुलना में कहां बैठते हैं।

आप E17 करने के बाद और बातें जोड़ सकते हैं।

E18) ऐसा लगता है कि बच्ची उन औपचारिक संकेतों को समझ नहीं पाई है जिनका इस्तेमाल हुआ है। शायद वह यह भी नहीं समझती है कि 3 को $9/2$ से कैसे भाग दें। इस स्थिति को सुधारने के लिए, बच्ची को एक भिन्न से दूसरी भिन्न को भाग देने की प्रक्रिया समझाना होगा। इसके लिए शायद बच्ची को फिर ठोस अनुभव देने होंगे। इस पर विस्तृत चर्चा के लिए खंड 4 देखें।