

इकाई 7 जोड़ना और घटाना

इकाई की रूपरेखा	पृष्ठ सं.
7.1 परिचय	37
उद्देश्य	38
7.2 जोड़ का मतलब समझाना	38
7.3 घटाने की समझ का विकास	41
7.4 जोड़ने व घटाने का सम्बन्ध	44
7.5 ऐल्गोरिद्म इस्तेमाल करने की समस्याएं	47
7.6 अंदाज़ा लगाने का कौशल विकसित करना	50
7.7 सारांश	52
7.8 अभ्यासों पर टिप्पणियां	53

7.1 परिचय

जब सात साल की कोई बच्ची $23 + 9$ जैसा सवाल नहीं हल कर पाती, तो इसके कारण क्या हो सकते हैं ? एक कारण यह हो सकता है कि वह जोड़ की प्रक्रिया में शामिल किसी एक या ज़्यादा अवधारणाएं / कौशल को नहीं समझ पाई है। ये हैं — गिनने की क्षमता, 100 तक की संख्याओं व संख्याओं की जानकारी, स्थानीय मान की समझ, जोड़ने की अवधारणा तथा सोच-समझकर जोड़ के ऐल्गोरिद्म को लागू करना। इकाई 5 व 6 में हमने ऐसे कुछ तरीकों पर विचार किया था जिनके द्वारा बच्चों को संख्याओं, संख्याओं, गिनती व स्थानीय मान से संबंधित समस्याओं से निपटने में मदद दी जा सकती है। इस इकाई में हम बच्चों को जोड़ने व घटाने के अर्थ व ऐल्गोरिद्मों को समझाने के तरीकों पर ध्यान देंगे।

इकाई के शुरू में हम जोड़ की समझ के विकास के तरीकों पर चर्चा करेंगे। इसके बाद हम घटाने के संदर्भ में इसी तरह की बातचीत करेंगे। हम इस बात पर जोर देंगे कि बच्चों के साथ इन संक्रियाओं की शुरुआत ठोस वस्तुओं के ज़रिये की जानी चाहिए। इनसे संबंधित इबारती सवाल भी उनके सामने शुरू से ही प्रस्तुत होने चाहिए। ये दोनों संक्रियाएं लगभग एक साथ ही सिखाई जानी चाहिए।

इसके बाद हमने उन गलतियों के कारणों पर चर्चा की है जो बच्चे तब करते हैं जब वे मशीनी ढंग से सूत्रों का इस्तेमाल करते हैं। इस चर्चा से उभरता यह है कि बद्किस्मती से हम जोड़-बाकी के ऐल्गोरिद्मों और संक्रियाओं को अक्सर एक ही मानकर चलते हैं। हम यह भूल जाते हैं कि जोड़ने और घटाने में समूहीकरण, वस्तुओं की इकाइयों तथा सूत्र की समझ की ज़रूरत होती है। जब कोई बच्ची इन सभी पहलुओं को समझ ले, तभी कहा जा सकता है कि वह इन संक्रियाओं को 'जानती' है। भाग 7.5 में हम इस स्थिति को सुधारने के कुछ उपायों की भी चर्चा करेंगे।

और अन्त में, हमने बच्चों में संख्याओं के जोड़ या अंतर का अंदाज़ा लगाने की क्षमता विकसित करने के महत्व पर ध्यान दिया है। इसके बाद हम कुछ ऐसी गतिविधियों की चर्चा करेंगे जिनकी मदद से यह क्षमता विकसित की जा सकती है।

पूरी इकाई के दौरान हम ऐसी गलतफहमियों पर गौर करेंगे जो बच्चों के मन में उस समय बनती हैं जब कक्षा में जोड़-घटा सिखाया जाता है। इस बात पर भी चर्चा की गई है कि ये गलतफहमियां क्यों बनती हैं और इनको हटाने में बच्चों को मदद देने के लिए क्या तरीके

अपनाए जा सकते हैं। हमेशा की तरह यहां भी हमने बच्चों को ध्यान में रखते हुए अवधारणा सिखाने के लिए गतिविधियों पर आधारित तरीके ही सुझाए हैं।

इस इकाई में चर्चित कई समस्याओं का सम्बंध इकाई 6 की बातों से है। लिहाज़ा, शायद इकाई 6 पर एक बार फिर नज़र डाल लेना आपके लिए उपयोगी रहेगा।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- जोड़ व बाकी में शामिल प्रक्रियाओं को समझा सकेंगे;
- ऐसी गतिविधियों की योजना बनाकर उन्हें लागू कर सकेंगे जिनसे बच्चों को जोड़ना व घटाना सीखने में मदद मिले;
- इबारती सवालों को बनाने व उन्हें हल करने की बारीकियां समझा सकेंगे;
- संख्याओं को जोड़ने व घटाने के ऐल्गोरिद्म समझाने के लिए कारगर तरीके सुझा सकेंगे;
- बच्चों को संख्याओं के जोड़ व अंतर का अंदाज़ा लगाने की क्षमता विकसित करने में मदद कर सकेंगे;
- अपने सिखाने के तरीकों का मूल्यांकन कर सकेंगे।

7.2 जोड़ का मतलब समझाना

मलयाली लेखक वायकोम मुहम्मद बशीर के एक उपन्यास के पात्र से उसका शिक्षक पूछता है, "एक और एक कितना?" बच्चे का जवाब होता है, "और बड़ा एक।" यह जवाब बहुत ही अनोखा है। लेकिन, क्या कई मामलों में यह जवाब जायज़ नहीं है, जहां 'और' का मतलब 'मिलने' से होता है? जैसे जब दो नदियां आपस में मिलती हैं और फिर पहले से बड़ी, ज्यादा चौड़ी एक नदी के रूप में बहती हैं?

क्या यह आम तौर पर सही नहीं है कि जब हम दो राशियों को जोड़ते हैं तो हमें ज्यादा बड़ी राशि हासिल होती है? घर पर भी आपको इसके कई उदाहरण मिल जाएंगे। कई बार आपने दो छोटे समूहों को जोड़कर एक बड़ा समूह बनाया होगा, नहीं? जैसे 2 संतरे और 5 संतरे जोड़ने से, या आटे में पानी मिलाने पर आपको ज्यादा मात्रा प्राप्त हो जाती है। अलबत्ता इस इकाई में हम उन्हीं समूहों के जोड़ पर ध्यान देंगे जिनमें चीजों की गिनती की जा सके, जैसे संतरे या चपातियां। हम आटे और नदी जैसे उदाहरणों की बात नहीं करेंगे, जो कि इस तरह गिनी नहीं जा सकती।

यहां हम उन तरीकों की बात करेंगे जिनसे बच्चों को यह समझने में मदद मिले कि विभिन्न समूहों को जोड़ने का अर्थ यह पता लगाना होता है कि इनमें कुल चीजें कितनी हैं। हम चाहेंगे कि वे इससे सम्बंधित अवधारणाओं और भाषा को समझ जाएं। इस उद्देश्य की पूर्ति कैसे करें ?

छोटे बच्चों के लिए ज़रूरी होता है कि जोड़ की संक्रिया का कोई ठोस संदर्भ हो। शुरू में उन्हें काफी सारे ठोस अनुभवों की ज़रूरत होती है। मसलन, बच्ची को 2 कंचों और 3 कंचों की ढेरियां देकर कह सकते हैं, "ये 2 कंचे हैं, और ये 3 और कंचे हैं, अब बताओ कि कुल कितने कंचे हैं।" फिर उसे तीन टहनियां और 2 टहनियां दी जा सकती हैं। तीन बटन-दो बटन, तीन पत्थर-दो पत्थर, तीन बिस्कुट-दो बिस्कुट, वगैरह देकर इसी संक्रिया को दोहराया जा सकता है। हर बार उसे प्रेरित करें कि जो कुछ वह करे, उसको बताती जाए, जैसे कि "ये 2 कंचे हैं, और ये 3 कंचे हैं। मैंने उनको मिला दिया। अब (गिनते हुए) ये 5 कंचे हैं।" शुरू में शायद उसे

मदद की जरूरत हो। आप कुछ सवाल पूछ-पूछ कर उसकी मदद कर सकते हैं, जैसे, तुम्हारे पास कितने पत्थर थे? मैंने तुम्हें कितने पत्थर और दिए? तो कुल कितने पत्थर हुए?

धीरे-धीरे जब वह अपने द्वारा की गई क्रिया का वर्णन करना सीख जाए, तब आप 'जोड़ना' शब्द प्रस्तुत करके उसे बच्ची द्वारा की जाने वाली क्रिया से जोड़ सकते हैं। धीरे-धीरे यह शब्द उसकी भाषा का अंग बन जाएगा, और इसे वह समूहीकरण से संबंधित करने लगेगी। इन्हीं तरीकों से वह 'कुल', 'धन', आदि शब्दों को भी समझने लगेगी।

अब, जब वह जोर-जोर से बोले, "2 कंचे और 3 कंचे बराबर 5 कंचे", आप बोर्ड या कागज़ पर $2+3=5$ लिख सकते हैं। जब वह बोले, "2 पेंसिल और 3 पेंसिल बराबर 5 पेंसिल", आप फिर $2+3=5$ लिख सकते हैं। इसी तरह के कई उदाहरणों से वह प्रतीकात्मक निरूपण ' $2+3=5$ ' को जानने लगेगी। कई जोड़-तथ्यों को देखकर ही वह उनको खुद प्रतीकों में लिखने लगेगी। अभ्यास के साथ वह इन प्रतीकों से अच्छी तरह से वाकिफ़ हो जाएगी।

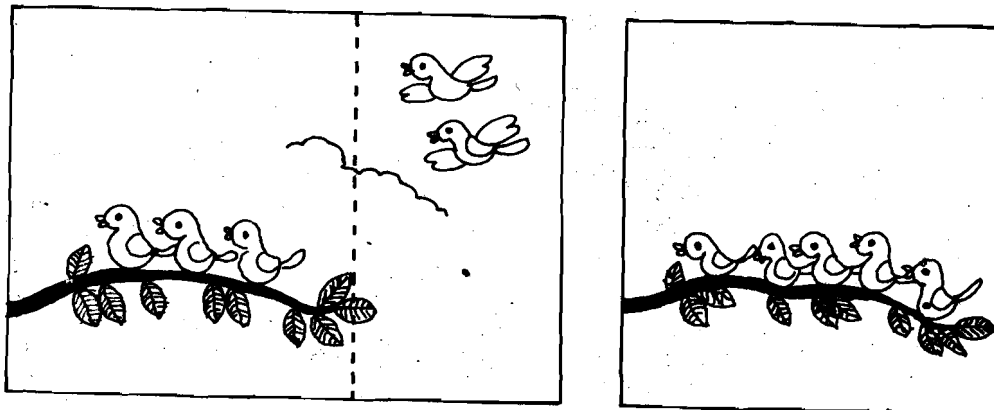
वस्तुओं के समूहों को मिलाने के काफी अनुभवों के बाद ही बच्चे जोड़े के गुण समझ पाते हैं, जैसे कि $3+2$ और $1+4$ एक ही बात है, या अगर $3+2=5$ है तो $5=3+2$ होगा।

आइए अब यह देखें कि अपने छात्रों को जोड़ सिखाने के लिए सुश्री मेहता ने क्या तरीका अपनाया।

उदाहरण 1 : सुश्री मेहता दिल्ली के एक सरकारी प्राइमरी स्कूल में पढ़ाती हैं। कक्षा 1 में उनके पास आने वाले बच्चे कुछ संख्याओं से वाकिफ़ होते हैं। सत्र के शुरू में सुश्री मेहता बच्चों से कंकड़ जैसी चीज़ें इकट्ठी करके गिनने को कहती हैं। फिर वे उनसे कहती हैं कि उन चीज़ों की दो ढेरियां बनाए, और पता लगाएं कि दोनों को मिलाकर कुल कितनी चीज़ें हैं। यही काम वे ऐसी कई चीज़ों के साथ दोहराती हैं जो बच्चों को आसपास ही आसानी से मिल सकें। इसके बाद वे बच्चों को खेलों के द्वारा जोड़ने के अभ्यास के मौके देती हैं बिना उन्हें ये बताए कि वे जोड़ना सीख रहे हैं। इसके लिए वे नीचे दिए गए खेलों की मदद लेती हैं।

दो बच्चों को या दो टोलियों को पांसे और पत्थर दे दीजिए। हर बच्ची (या टोली) पांसा फेंकती है और पांसे पर आने वाली संख्या के बराबर पत्थर उठा लेती है। दो मर्तबा करने के बाद जिसके पास ज्यादा पत्थर होते हैं वही विजेता। पूरी गतिविधियों के दौरान टोली के एक सदस्य को जोर से बोलते जाना होता है कि उसकी टोली क्या कर रही है।

सुश्री मेहता और भी कई तरह की गतिविधियों का उपयोग करती हैं। मसलन वे बच्चों को चित्र 1 में दिखाए गए चित्र कार्ड जैसे कार्ड हिस्सों में दिखाती हैं। पहले सिर्फ़ बैठी हुई तीन चिड़िया दिखाती हैं, और उसके बाद 2 चिड़िया जो उड़कर आ रही हैं। अब वे बच्चों से यह पता लगाने को कहती हैं कि कुल कितनी चिड़िया हैं।



चित्र 1 : ' $3+2=5$ ' की चित्र प्रस्तुति

जब वे उत्तर निकाल लेते हैं, तब वे चित्र का दाहिना हिस्सा खोलती हैं। बच्चे यह गतिविधि कई कार्डों के साथ करते हैं। वे हर कार्ड में निम्नानुसार कुछ लिखित भाग भी जोड़ देती हैं और इसे लाइन-दर-लाइन खोलती हैं।

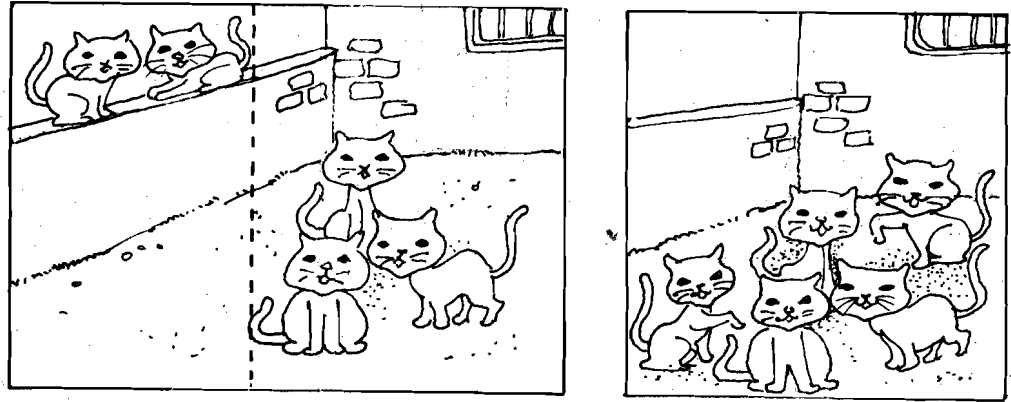
3 और 2 मिलाकर बनते हैं 5

3 और 2 होंगे 5

3 घन 2 बराबर 5

$3 + 2 = 5$

धीरे-धीरे इस तरह के काफ़ी अनुभव के बाद उन्होंने पाया कि बच्चे 'घन' और 'बराबर' को अपने प्रतीकों के साथ जोड़ने लगे। तब वे उन्हें चित्रात्मक वर्कशीट-देती हैं, जैसी कि चित्र 2 में दिखाई गई है। वे बच्चों से चित्रों के नीचे उनमें दिखाए गए जोड़ लिखने को भी कहती हैं।



$$\square + \square = \square$$

चित्र 2

वे बच्चों को ऐसी कई गतिविधियों के बाद ' $3 + 4 = \dots$ ' जैसे प्रश्न करने को देती हैं। वे कहती हैं, "सिर्फ अभ्यास से ही बच्चे '+' और '=' से वाक़िफ़ हो सकते हैं।"

तो सुश्री मेहता का तरीका है कि बच्चों को जोड़ से परिचित कराने के तीन चरण हैं — ठोस चीज़ों के संदर्भ में, चित्रण प्रस्तुति और प्रतीकात्मक प्रस्तुति।

— X —

और अब कुछ अभ्यास आपके लिए।

- E1) क्या जोड़ना ऊपर दिए गए तरीके से सिखाया जाना चाहिए? अपने उत्तर का कारण दीजिए।
- E2) बच्चों को चीज़ों के समूहों को जोड़ने का ठोस अनुभव देते समय, हमें एक जैसी चीज़ों का इस्तेमाल करना चाहिए। क्या आप इससे सहमत हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

इकाई 3 में हमने बताया था कि यह बहुत महत्वपूर्ण है कि बच्चे जिस अवधारणा को सीखने की कोशिश कर रहे हैं, उन्हें उस अवधारणा से सम्बंधित ढेर सारे इबारती सवाल करने का अवसर मिले। इस तरह के बहुत-से सवाल हल करते हुए बच्चे जोड़ने की अमूर्त सक्रिया को अर्थ देने लगते हैं। जब मैं अपने पांच वर्षीय पड़ोसी से पूछती हूँ कि 4 और 2 कितने होते हैं, तो वह तरह-तरह के अनुमान लगाता है। लेकिन जब मैं उससे यह पूछती हूँ कि अगर उसकी मां चार चपाती खाए और वह खुद दो चपाती खाए तो कुल कितनी चपातियों की ज़रूरत होगी, तो उसका उत्तर सही होता है। कारण यह है कि यह संदर्भ उसकी दुनिया से जुड़ा हुआ है।

घटने की प्रक्रिया जोड़ने की प्रक्रिया की उल्टी है। किसी संग्रह में कुछ और जोड़कर उसे बड़ा बनाना तथा उस संग्रह में से कुछ निकालकर उसे छोटा करना प्रत्यक्ष विपरीत प्रक्रियाएँ हैं।

7.3 घटने की समझ का विकास

अब तक हमने उन तरीकों पर बात की जिनकी मदद से बच्चों को छोटी-छोटी संख्याओं के संदर्भ में जोड़ से परिचित कराया जा सकता है। इस मुकाम पर उनका परिचय उलट संक्रिया के नाम से घटने से कराया जा सकता है।

इबारती सवाल बनाएँ। मसलन, उनसे कहा जा सकता है कि $3 + 5 = 8$ को दर्शाती दो रईसी। आप उनसे यह भी कह सकते हैं कि वे किसी संख्यात्मक जोड़ के आधार पर खूब चित्र-आधारित गतिविधियाँ कर रहे होंगे, उस दौरान तो आप उनका मूल्यांकन, लगातार करते रहेंगे।

E3) ऊपर लिखी दो किस्में में क्या अन्तर है? बच्चों के लिए इनमें से किसी समझना ज्यादा मुश्किल होता है?

E4) कुछ ऐसी गतिविधियाँ व इबारती सवालों की सूची बनाइए जिनसे बच्चों को दिए गए दो किस्मों की समझ बनाने में मदद मिल सके।

बच्चों को इन दोनों किस्मों से कैसे परिचित कराएँ? नीचे दिए गए अभ्यासों से शायद आपका कुछ मदद मिले।

- **बुद्धि** : जब किसी राशि को किसी निश्चित मात्रा से बढ़ाना हो, और वहीं हूँदें राशि को घटाना हो। (जैसे, एक थैले में 5 बोलतें हैं और इसमें 4 बोलतें और डाली गई हैं। अब थैले में कितनी बोलतें होंगी?)
- **एकजीकरण** : जब उन्हें दो या दो से अधिक राशियाँ (जैसे बस्तुओं के समूह, पैसे, दूरी, आयतन, आदि) को मिलकर एक राशि बनानी होती है। (जैसे, यदि मुन्गी के पास 3 पसिलें हैं और मुन्गा के पास दो, तो कुल कितनी पसिलें हैं?)

माटे तौर पर, जोड़ से सम्बंधित दो किस्म के इबारती सवालों से बच्चों का वास्तविक पड़ता है।

जुड़े हो।
सवाल आसान हो और ऐसी विभिन्न परिस्थितियों से सम्बंध रखते हो जो बच्चों की दृष्टियाँ से जाणो? इससे उन्हें जोड़ की समझ बेहतर बनाने में मदद मिलेगी। हाँ, यह ज़रूर है कि ऐसे इन कवों में (दूसरी डेरी की ओर इशारा करते) मिला दो, तो गुन्डारे पास कुल कितने कवें हो उनसे इस तरह के प्रश्न पूछिए : यदि गुम इन कवों को (एक डेरी की ओर इशारा करते हुए) "आगर मुझे ये गेँदें भी मिल जाएँ, तो मेरे पास डेर सारी गेँदें हो जाएँगी।" मैंने पूछा, "कितनी?" हमने दो और टैनिंस गेँदों का उपयोग किया। मीला ये गेँदें भी रखना चाहती थी। तो उसने कहा, बताया कि अब उसके पास पांच गेँदें हैं। दो दिन बाद हमने एक 'किनेट मैच' खेला जिसमें

पांच वर्षीय मीला को टैनिंस (tennis) गेँदों से खेलने का शौक है। एक दिन ऐसा हुआ कि उसके पास दो गेँदें थी, और एक दोस्त तीन गेँदों वाला एक डिब्बा लेकर आया। मीला ने तुरन्त सबको बताया कि अब उसके पास पांच गेँदें हैं। दो दिन बाद हमने एक 'किनेट मैच' खेला जिसमें

इबारती सवाल पूछने के स्वाभाविक अवसरों की तलाश करें। मसलन, 'जाने' के बाद। जब आप बच्चों से मिलें, बातचीत करें, तो उनसे उस अवधारणा के बारे में

आइए, कुछ ऐसी स्थितियों पर गौर करें जहाँ बच्चों के लिए यह पहचानना आवश्यक होगा कि उस सवाल का हल निकालने के लिए घटाने की ज़रूरत है। जोड़ने की तुलना में घटाने से संबंधित सवाल बच्चों के लिए ज़्यादा पेचीदा होते हैं। कारण यह है कि इसमें उन्हें यह पहचानना पड़ता है कि किस राशि में से किस राशि को निकाल देना है। यह एक महत्वपूर्ण अंतर है क्योंकि इससे पहले बच्चों का सम्पर्क जोड़ से हुआ था, जहाँ $2 + 3 = 3 + 2$ होता था। मगर $9-3$ और $3-9$ एक ही बात नहीं है। यानी घटा में संख्याओं का क्रम नहीं बदला जा सकता है, अर्थात् घटा क्रमविनिमेय संक्रिया नहीं है।

चलिए, घटा से संबंधित कुछ ऐसे इबारती सवाल की किस्में देखें जो बच्चों के सामने आती रहती हैं। मोटे तौर पर चार किस्में हैं।

- हिस्से करना — कुछ चीजों को निकालने या हटाने तथा बची हुई चीजों की संख्या पता करने की क्रिया। (जैसे, किसी डिब्बे में 15 टॉफियां थीं। 10 खाई गईं, तो कितनी बचीं ?)
- कमी मालूम करना — जब मूल राशि और शेष बची राशि पता है, तब यह पता लगाना है कि कितनी राशि हटा दी गई या निकाली गई है। (जैसे, किसी डिब्बे में 15 टॉफियां थीं, और अब सिर्फ 5 बची हैं। तो कितनी खाई गई हैं ?)
- तुलना — दो समूहों या संख्याओं के बीच अंतर पता लगाना, यानी एक समूह में दूसरे के मुकाबले कितना कम या ज़्यादा है। (जैसे, यदि मुन्ना के पास 15 रबड़ हैं और मुन्नी के पास 5 हैं, तो मुन्नी के पास मुन्ना से कितने रबड़ कम हैं ?)
- पूरक जोड़ — किसी संख्या या समूह को बढ़ाकर किसी अन्य संख्या या समूह में तब्दील करने के लिए कितना जोड़ना होगा। (जैसे, यदि किसी कक्षा में 50 बच्चे बैठ सकते हैं और 20 पहले से बैठे हुए हैं, तो कितने और बच्चे उस कक्षा में बैठ पायेंगे ?)

ऊपर दिए गए चार किस्मों में से बच्चों को पूरक जोड़ पहचानने में सबसे ज़्यादा कठिनाई होती है। इस किस्म से संबंधित ज़्यादातर सवालों में 'और कितना' पूछा जाता है। बच्चों के लिए 'और' का संबंध जोड़ से होता है, और वह सवाल में दिए गए सारे अंकों को जोड़ डालते हैं। दूसरी तरफ़ ऐसे बच्चे भी होते हैं जो घटाने के सारे सवालों को पूरक जोड़ के सवाल के रूप में बदल लेते हैं। मसलन, वे '13 में से 7 घटाओ' को '7 में क्या जोड़ने से 13 आएगा' के रूप में देखते हैं। मन में हिसाब करते हुए हममें से कई लोग इस तरीके का सहारा लेते हैं, मसलन $391-180$ पता करने के लिए हम जोड़-जोड़ कर 180 को 200 बना लेते हैं, और फिर 391 तक ले जाते हैं। यानी $391-180 = 20 + 191$ हो जाता है।

अब आप इबारती सवालों के इन किस्मों से संबंधित कुछ अभ्यास कीजिए।

E5) 'तुलना' और 'पूरक जोड़' के सवालों में क्या अंतर है ?

E6) ऊपर दिए गए चार किस्मों का एक-एक ऐसा इबारती सवाल बनाइए जो बच्चों की दुनिया से संबंधित हो।

आइए अब यह देखें कि घटाने की क्षमता विकसित करने में हम बच्चों की मदद कैसे कर सकते हैं। जोड़ की तरह घटाने से भी बच्चों का परिचय परिचित वस्तुओं के संदर्भ में ही कराया जाना चाहिए। बच्चों को 5 लड्डू में से 3 लड्डू घटाने ('निकालने', 'हटाने', 'कम करने') को कहा जा सकता है। इसी प्रकार से 5 चपातियों में से तीन चपातियां, 5 कंकड़ों में से तीन कंकड़, 5 तीलियों में से 3 तीलियां, वगैरह, घटाने को कहा जा सकता है। इस तरह के काफी अभ्यास के बाद वे धीरे-धीरे यह समझने लगेंगे कि 'पांच में से तीन निकालने पर दो बचते हैं।'

संबंधित भाषा से बच्चों को वाक़िफ़ कराने के लिए यह किया जा सकता है कि जब क्रिया की जा रही हो, तब हम साथ-साथ उससे जुड़े विभिन्न शब्द दोहराते जाएं। ऐसी कहानियां और खेल भी

सोचे जा सकते हैं जिनमें घटाने से संबंधित शब्दों का उपयोग होता हो। हमें एक शिक्षक ने सुझाया कि निम्नलिखित जैसी कहानियां मददगार हो सकती हैं :

'राजू के 9 दोस्त थे। सभी को उसने अपने जन्मदिन की पार्टी पर बुलाया। लेकिन मुन्नी और पप्पू ने कहीं और जाना था, इसलिए उन्होंने मना कर दिया। तो 9 घटा 2, यानि 7 दोस्त पार्टी पर आए।'

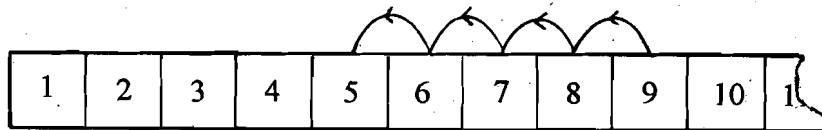
ज़रा बड़े बच्चों के लिए कहानी में और कुछ भी जोड़ा जा सकता है। मसलन, 'पार्टी में किसी वजह से 3 और दोस्त नहीं जा सके। तो कितने लोग आ रहे हैं, यह गिनने के लिए राजू ने 7 में से 3 घटा दिया।' को ऊपर की कहानी में जोड़ सकते हैं।

हम बच्चों के लिए कुछ घटा सम्बन्धी खेल भी बना सकते हैं, जिनमें उन्हें घटाने की क्षमता विकसित करने के कई अवसर मिलें। ऐसा करते हुए हमें यह ध्यान देना चाहिए कि बच्चे हर संदर्भ में इस्तेमाल होने वाली शब्दावली पर ध्यान दें। जैसे, आप बच्चों को दो टोलियों में बांट सकते हैं। एक टोली कोई घटा-तथ्य बोले और दूसरी टोली उसके अनुरूप इबारती सवाल बनाए। मसलन, यदि एक टोली बोलती है $7-3 = 4$, तो दूसरी टोली कह सकती है, "यदि मुन्नी और मुन्ना के पास कुल 7 पेंसिलें हैं और मुन्नी के पास 3 हैं, तो मुन्ना के पास कितनी पेंसिलें हैं?", आदि।

अब आप थोड़ा रुककर सोचिए कि हमने किन-किन बातों की चर्चा की है, और फिर यह अभ्यास कीजिए।

E7) घटाने की क्षमता विकसित करने में बच्चों की मदद करने के लिए एक खेल लिखिए।

घटाने का अभ्यास करने में बच्चों की मदद के लिए संख्या पट्टी (number strip) का भी इस्तेमाल किया जा सकता है। इसकी मदद से उल्टी तरफ से गिनने की क्षमता का विकास किया जा सकता है। मसलन, 9 में से 4 घटाने का मतलब यह होगा कि पहले आगे बढ़ते हुए 9 तक गिनें और फिर 4 खाने वापिस जाएं और देखें कि आप कहां हैं।



चित्र 3: संख्या पट्टी की मदद से 9-4 बताना।

एक बार बच्चों को घटाने की प्रक्रिया समझ में आ जाए, तो आप उन्हें घटाने का संकेत बता सकते हैं। यहां भी यह ज़रूरी होगा कि शब्द 'ऋण' तथा प्रतीक '-' से पहचान स्थापित करने के लिए उन्हें बारम्बार इनका उपयोग करने का अवसर मिले।

जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, बच्ची के लिए घटाना तब ज़्यादा आसान होता है जब वास्तविक चीजों का इस्तेमाल किया जाता है। वह निश्चित संख्या में चीजें अलग कर देती है और शेष बची चीजों को गिन लेती है। या वह कई सारी खड़ी रेखाएं खींचकर उनमें से जितने को घटाना है उन्हें काटकर बाकी को गिन सकती है। वह चाहे तो संख्या पट्टी पर उल्टी तरफ से गिनती भी कर सकती है। लेकिन, अगर इनमें से किसी चीज़ की मदद के बगैर ही घटाने की संक्रिया शुरू की जाए, तो शायद उसे '13 में से 8 घटाओ' जैसे सवाल करने में भी मुश्किल होगी।

E8) आप बच्चों को 15 - 8 जैसे सवालों को हल करना किस तरीके से सिखाते रहे हैं ?

E9) 8 साल व उससे बड़े बच्चों को घटाने के कुछ सवाल दीजिए। नोट कीजिए कि वे इन सवालों को हल करने के लिए कौन-कौन से तरीके अपनाते हैं। यह भी पता करने की कोशिश कीजिए कि इन्हें हल करते वक़्त वे किन दिक्कतों का सामना करते हैं।

अभी तक हमने पहले जोड़ और फिर घटा सिखाने के तरीकों पर विचार किया। लेकिन इन अवधारणाओं का आपस में गहरा संबंध है। आइए यह देखें कि इन अवधारणाओं को सिखाने में इस संबंध से कैसे फायदा उठाया जा सकता है।

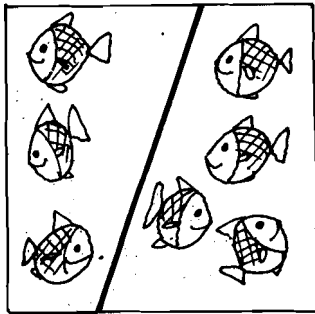
7.4 जोड़ने व घटाने का सम्बन्ध

पिछले भागों में हमने इस बात पर जोर दिया कि बच्चों को जोड़ व घटा समझने में मदद करने के लिए ज़रूरत इस बात की है कि वे ऐसे अनुभवों से गुज़रे जिनमें जोड़ने या घटाने की ज़रूरत पड़ती हो। इस मामले में हमने कुछ ऐसे लोगों से चर्चा की जो यह समझने की कोशिश करते हैं कि बच्चे गणितीय अवधारणाएं किस ढंग से सीखते हैं। हमारे सवालों के जवाब में उनमें से एक व्यक्ति ने बताया कि वह कैसे बच्चों को जोड़ व घटा सिखाता है। उसकी बात नीचे के उदाहरण में दी गई है।

उदाहरण 2 : रज़ा कुछ वर्षों से एक प्राइमरी स्कूल में सिखाने के कई तरीके आजमाता रहा है। उसके मुताबिक बच्चों को पहले खिलौनों, या खाने की चीज़ों, या उनके आसपास पाई जाने वाली चीज़ों, आदि की छोटी संख्याएं जोड़ने को कहा जाना चाहिए। इस तरह के काफी अभ्यास करने के बाद उन्हें (भाग 7.3 में सुझाई गई विधियों से) घटाने की समझ बनाने में मदद दी जा सकती है। और जब वे घटाना सीख रहे हों, तब जोड़ने व घटाने की संक्रियाओं के परस्पर संबंध भी उनको स्पष्ट हो जाने चाहिए।

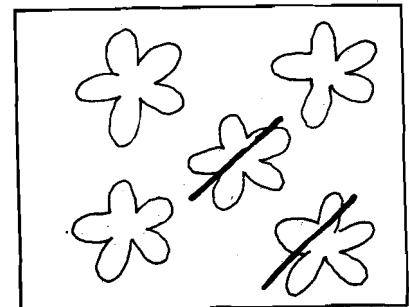
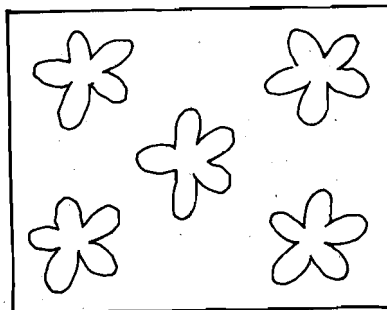
उसने पाया कि जानी-पहचानी चीज़ों को जोड़ने के काफी अनुभव के बाद वे सीख जाएंगे कि, मसलन, 3 कंचे और 2 कंचे मिलाकर 5 कंचे होते हैं। इसी तरह के अभ्यास से वे यह भी समझ जाएंगे कि यदि 5 कंचों में से 3 कंचे हटा दिए जाएं तो शेष कितने बचेंगे। इसके बाद वह गतिविधियों से इन दो संक्रियाओं के संबंध को जोड़ने की कोशिश करता है। जैसे वह उन्हें 3 लड्डू और 2 लड्डू देकर पूछता है कि उनके पास कुल कितने लड्डू हुए। इसके बाद वह उनसे कहता है कि 5 में से 2 लड्डू अलग कर दें और बताएं कि उनके पास कितने बचे (बशर्ते कि तब तक बच्चे कुछ लड्डू खा न गए हों!)। यही गतिविधि वह नाना प्रकार की वस्तुओं के साथ करता है - टॉफियां, चम्मच, गेंद, आदि-आदि। इस तरह से बच्चे 'निकालने' का मतलब समझने लगते हैं और इसका संबंध 'जोड़' से बनाने लगते हैं।

जब बच्चे थोड़ी-थोड़ी चीज़ों के संदर्भ में इन अवधारणाओं का अभ्यास कर चुकते हैं, तब वह उनका परिचय जोड़ के संदर्भ में चित्रात्मक प्रस्तुति से कराता है (जैसे चित्र 4 में)। साथ ही साथ, वह बच्चों को '+' प्रतीक भी बताता है।



चित्र 4 : जोड़ने के लिए चित्र कार्ड

ऐसे चित्रों व प्रतीकात्मक निरूपण के अभ्यास के बाद, वह यही क्रिया घटाने के संदर्भ में करता है। इसके लिए वह पहले उन्हें चित्र 5(क) जैसा कोई चित्र दिखाकर पूछता है, "कुल कितनी चीज़ें हैं?" फिर उनके सामने ही वह कुछ चीज़ों को जैसे 2 चीज़ों को, काट देता है (चित्र 5(ख) देखिए) और पूछता है, "यदि मैं दो चीज़ें निकाल दूं, तो कितनी बचीं?" साथ ही साथ चित्र के नीचे वह लिख देता है $5 - 2 = 3$.



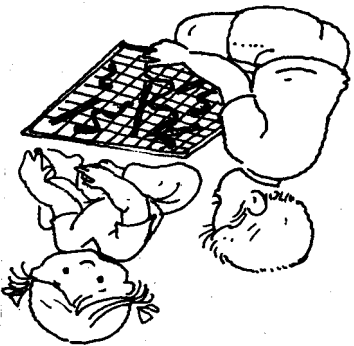
(a)

(b)

चित्र 5 : घटाने के लिए चित्र कार्ड

यहां हम इबारती सवालों के एक ऐसे पहलू को स्पष्ट तौर पर रखना चाहेंगे, जिसका जिक्र उदाहरण 2 में रजा ने किया था। आजकल बच्चों को इबारती-सवालों से तभी वास्ता पड़ता है जब वे जोड़ने और घटाने के औपचारिक सूत्रों को 'सीख' चुके हों। और तब उनसे जो सवाल

चित्र 7 : बच्चे जोड़-घटा का अभ्यास करते हुए।



लेकर आत्म विश्वास आया। इससे उसे यह समझने में भी मदद मिलेगी कि जोड़ना-घटाना रही है। उसे धीरे-धीरे अपनी समझ बनाने दें। इससे उसमें जोड़ने/घटाने की अपनी क्षमता का का वक्त दे कि उसे करना क्या है। उसे उस प्रक्रिया के बारे में बोलने दीजिए, जिससे वह गुजर साधानी यह रखनी होगी कि हम धैर्य से काम लें, जवाब की जादू न करें। उसे यह समझने या "कितने खाने नीचे रखिके?"। लेकिन ऐसी स्थिति में बच्ची से सवाल हल कराते वक्त वक्त इस तरह के सवालों का जवाब देना काफी खिचकर लगेगा कि "कितने खाने ऊपर वहां?", इस्तेमाल करने का मौका मिलता है। इसी प्रकार से किसी 7 वर्षीय बच्चे को सांप-सीढ़ी खेलते है। इसके अलावा कंचे या लूंडी जैसे खेल हैं जिनमें बच्चों को जोड़-घटा से संबंधित भाषा को समय सामान की निगरानी करते हुए, आदि परिस्थितियों में उसे जोड़ने-घटाने की जरूरत पड़ती उसका उपयोग करना चाहिए। मसलन, मजं सजाते हुए, पैसे का लेन-देन करते हुए, सफर के संदर्भों में कहीं बाढ़ करना होगा। इस मकसद से, जब कभी भी स्वाभाविक रूप से मौका मिले हमें चीजों या चित्रों का सहारा लेने की जरूरत पड़ती है। उसे जोड़ने-घटाने का अभ्यास सार्थक अपने उत्तर की पुष्टि के लिए और अपनी समझ को सुनिश्चित करने के लिए बारम्बार ठोस कर सकती है, वह इस मुकाम से आगे अर्पित चरण की तरफ काफी धीमे-धीमे जाएगी। उसे समय दिमाग में रखना उपयोगी होगा। जो बच्ची कुछ चीजों के या चित्रात्मक संदर्भ में जोड़-घटा आगे बढ़ने से पहले आइए सीखने के ऐसे पहलू को दोहराएं जिसे सिखाने का तरीका तय करते

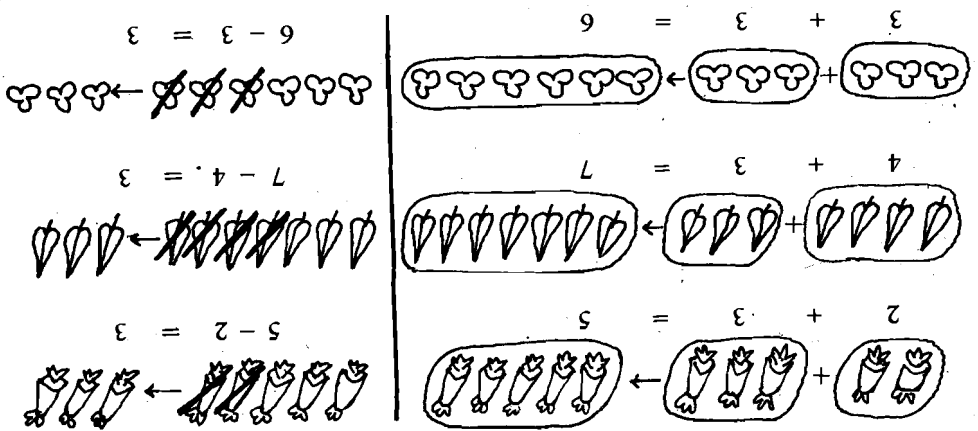
E10) रजा के तरीके के किन पहलुओं से आप असहमत हैं, और क्यों ?

और अब इस उदाहरण के बारे में एक अभ्यास।

— X —

संबंधित होते हैं और वह उन्हें बहुत सरल व स्पष्ट शब्दों में प्रस्तुत करता है। उनसे जोड़ने/घटाने के इबारती सवाल भी हल करवाता है। ये सवाल बच्चों की दुनिया से जैसे तथ्य को चीजों के इस्तेमाल से या चित्रात्मक रूप से प्रदर्शित करने को भी कहता है। वह बच्चे जोड़ने की अवधारणा को सीख पाए है या नहीं, यह देखने के लिए वह उनसे $6 - 4 = 2$

चित्र 6 : एक बकशीट का हिस्सा



देता है (देखें चित्र 6)।

इस चरण पर जोड़ने व घटाने का अभ्यास करवाने के लिए वह बच्चों को चित्रात्मक बकशीट भी संबंधित भाषा व प्रतीकों के आदी हो जाए।

हैं, यह जरूर है कि इस तरह के अभ्यास बार-बार, अलग-अलग तरह से करने होंगे ताकि बच्चे

पूछे जाते हैं, उनमें से अधिकतर बहुत पेचीदा और बच्चों की दुनिया से हटकर होते हैं। उदाहरण के लिए कक्षा 3 के बच्चों को 'अधिकारियों के वेतन' और 'विविध मद' सम्बन्धी सवाल दिए जाते हैं। ये शब्द ही बच्चों के लिए अनसुने होते हैं। साथ ही, बच्चे यह भी जानते हैं कि शिक्षक 'सही उत्तर' चाहते हैं। आम शिक्षक बच्चों को इस बात के लिए प्रोत्साहित नहीं करते कि वे पूरा समय लगाकर सवाल में दी गई स्थिति को समझ सकें, और यह भी समझ सकें कि क्या किया जाना है। लिहाजा सवाल को समझने या उसका विश्लेषण करने की बजाय बच्चे सवाल में ऐसे शब्दों या जुम्लों की तलाश में रहते हैं जिनसे उन्हें तुरन्त पता चल सके कि उस सवाल में क्या किया जाना है। मसलन, यदि सवाल में बच्ची को 'और कितने' शब्द नज़र आ जाए तो वह तुरन्त दी गई संख्याओं को जोड़ देगी क्योंकि उसके लिए 'और' शब्द जोड़ का संकेत है, हालांकि हो सकता है कि सवाल का उत्तर निकालने के लिए ज़रूरत घटाने की रही हो।

इसलिए यह ज़रूरी है कि लगभग शुरू से ही बच्चों को सोच-समझकर सरल शब्दों में दिए गए इबारती सवालों का अभ्यास कराया जाए। जैसे-जैसे बच्ची अवधारणाओं से परिचित होती जाए, वैसे-वैसे सवालों को ज्यादा पेचीदा बनाया जा सकता है। मसलन, जोड़ के वृद्धि किस्म के सवाल एकत्रीकरण किस्म के सवालों के काफी बाद करवाए जा सकते हैं। दरअसल, कुछ लोगों का मानना है कि वृद्धि किस्म के सवाल तो घटाने के विभाजन व तुलना मॉडल के सवालों के बाद ही करवाना उचित होगा।

अभी हमने जो चर्चा की, उसे लेकर अब आप कुछ अभ्यास करें।

E11) अभ्यास E4 व E6 में अपने द्वारा बनाई गई उदाहरणों की सूची को देखिए। हर उदाहरण के सामने लिखिए कि बच्चों की समझ के किस चरण पर आप उनके सामने वह सवाल रखेंगे।

E12) जब बच्ची कोई सवाल हल कर रही हो, तब शिक्षक के लिए कौन-सी बात ज्यादा अहमियत रखती है — बच्ची जिन मानसिक प्रक्रियाओं से गुज़र रही है, या सही उत्तर, या दोनों ही? अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

जब बच्चे जोड़ने व घटाने की अवधारणाएं समझ चुके हों, तब ज़रूरत होगी कि वे इन सक्रियाओं का कुशलता के साथ इस्तेमाल करना सीखें। हम सभी जानते हैं कि $1 + 1 = 2$, $3 - 2 = 1$ या $4 + 3 = 7$ जैसे जोड़-बाकी तथ्य याद हों, तो जोड़-घटा के सवालों को जल्दी से करने में मदद मिलती है। निम्नलिखित गतिविधियों के ज़रिए बच्चे इन तथ्यों को दिलचस्प तरीके से दोहरा सकेंगे, और इस तरह इनको अपने मन में ठीक से बैठा पाएंगे।

- 10-10 बच्चों की टोलियां बनाएं। ब्लैकबोर्ड पर जोड़ने-घटाने के अधूरे कथन लिख दें। कॉलम उतने ही हों जितनी टोलियां हैं तथा हर कॉलम में दस-दस सवाल हों। मसलन, अगर 5 टोलियां हैं, तो आप निम्नलिखित कॉलम बना सकते हैं।

I	II	III	IV	V
$2 + 3 = \square$	$1 + 7 = \square$	$5 - 2 = \square$	$6 + 3 = \square$	$7 - 4 = \square$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

टोली नम्बर 1 कॉलम I के सवालों के जवाब दे, टोली नम्बर 2 कॉलम II के सवाल करे, वगैरह। जैसे ही शिक्षक 'शुरू' कहे, वैसे ही हर टोली की पहली बच्ची ब्लैकबोर्ड पर आए और अपने कॉलम की पहली समीकरण पूरी करे। इसके बाद हर टोली की अगली बच्ची आकर अगला सवाल हल करे, वगैरह। जो टोली दसों सवाल सही-सही हल करे, वह विजेता।

बड़े बच्चों के लिए समीकरण ज़्यादा ऊँचे स्तर की समझ को आजमाने के लिए बदले जा सकते हैं। मसलन आप इनमें पूरक जोड़ और घटा के ऐसे सवाल जोड़ सकते हैं :

$$5 - \square = 2 \quad \text{और} \quad \square + 3 = 5$$

- आप बच्चों को ए और बी, दो टोलियों में बांट सकते हैं। बी टोली की एक बच्ची जोड़-बाकी का एक अधूरा कथन ब्लैकबोर्ड पर लिखे (जैसे $3 + 7 = \dots$) और ए टोली के किसी सदस्य से उसे पूरा करने को कहे। यदि वह उसे सही-सही पूरा कर दे तो ए टोली को 1 अंक मिलेगा। यदि वह नहीं कर पाती, तो बी टोली को 1 अंक मिलेगा। जिस टोली को अंक मिले वह अब एक और अधूरा जोड़-बाकी कथन ब्लैकबोर्ड पर लिखे और दूसरी टोली के किसी बच्चे से उसे पूरा करने को कहे। खेल का रूप तथा अंक देने का तरीका आप जो सिखाना चाहते हैं उसके अनुरूप बदल सकते हैं। अहम् बात यह है कि बच्चे अभ्यास गतिविधि में मगन हो सकें, और उन्हें मज़ा भी आए।
- ब्लैकबोर्ड पर तालिका 1 और 2 में दर्शाए अनुसार अधूरे जोड़ या बाकी का चार्ट बनाइए।

तालिका 1

+	1	2	3	4	5
1					
2			5		
3					
4					
5					

तालिका 2

-	1	2	3	4	5
6		4			
7					
8					
9					
10					

आप बच्चों को समझा दें कि चार्ट का उपयोग कैसे करना है। अब बच्चे एक-एक करके आएँ और चार्ट की कतारों व कॉलमों को देखकर एक-एक खाना भरते जाएँ।

- जोड़-बाकी का कुछ अभ्यास संख्या पट्टी के ज़रिए (चित्र 3) भी किया जा सकता है। इनमें से हर गतिविधि में बच्चों से कहें कि वे जो भी जोड़-बाकी तथ्य पेश कर रहे हैं, उसे प्रतीकों के रूप में स्पष्ट तरीके से बोलें और लिखें।

अब आपके लिए एक अभ्यास।

E13) उपरोक्त गतिविधियों के अलावा कोई गतिविधि सुझाइए जिससे बच्चों को जोड़/बाकी तथ्यों को सीखने में मदद मिले।

आइए, अब सक्रियाओं से संबंधित एक ऐसी क्षेत्र पर गौर करें जिसमें बच्चों को काफी कठिनाई का सामना करना पड़ता है।

7.5 ऐल्गोरिद्म इस्तेमाल करने की समस्याएं

- अपने अनुभव के आधार पर आप इस बात से सहमत होंगे कि बच्चों से अपेक्षा की जाती है कि वे संख्याओं को जोड़ने व घटाने के ऐल्गोरिद्म को मशीनी रूप से लागू करें, चाहे वे उनमें शामिल प्रक्रियाओं को समझे हों या नहीं। ऐसे में होता यह है कि बच्चे इन नियमों को लागू करने में गलतियां करते हैं। आखिरकार, बच्चे ऐसे तर्कहीन (उनके हिसाब से) नियमों को कितना व कब तक याद रख सकते हैं ?

ज़रा गलतियों के कुछ नमूने देखिए :

$\begin{array}{r} 62 \\ -17 \\ \hline 5.5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ +14 \\ \hline 311 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ +14 \\ \hline 31 \end{array}$	$\begin{array}{r} 91 \\ 582 \\ -255 \\ \hline 347 \end{array}$	$\begin{array}{r} 31 \\ 87 \\ -13 \\ \hline 414 \end{array}$
--	--	---	--	--

इन गलतियों के कारण क्या हैं ? हो सकता है कि

- i) बच्चे संबंधित संक्रिया को नहीं समझ पाए हैं, और/या
- ii) वे दो या दो से अधिक अंकों की संख्यांक लिखने का तर्क नहीं समझ पाए हैं, और/या
- iii) वे पुनर्समूहीकरण (यानी हासिल-उधार) नहीं समझे हैं।

हमें यह भी नहीं भूलना चाहिए कि कई समस्याएं इसलिए उत्पन्न होती हैं क्योंकि बच्चे को 'शून्य' की अवधारणा स्पष्ट नहीं होती। इसका कारण यह हो सकता है कि उसे यह बताया गया है कि 'शून्य' का मतलब 'कुछ नहीं' होता है। शायद इसी कारण से 205 जैसी गलतियां होती हैं।

$$\begin{array}{r} -21 \\ 224 \end{array}$$

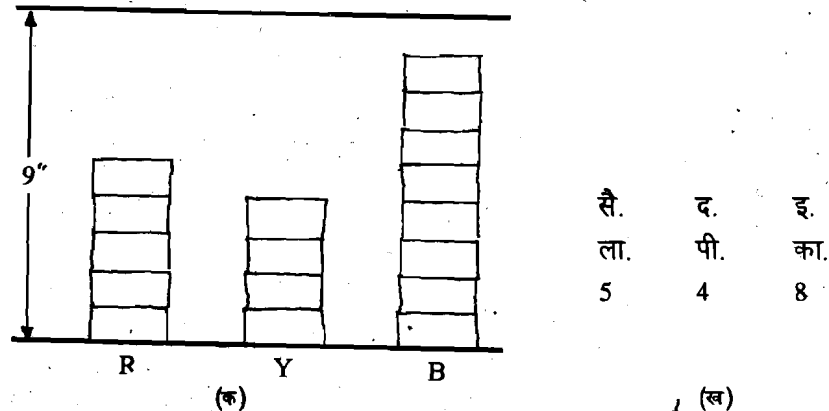
तो हम इस स्थिति में सुधार कैसे कर सकते हैं ? पिछले भागों में हमने उन तरीकों की बात की थी जिनके इस्तेमाल से बच्चों को जोड़-घटा की संक्रियाएं व संबंधित भाषा सीखने में मदद मिल सकती है। स्थानीय मान की बात इकाई 6 में की गई थी। आगे बढ़ने से पहले कृपया भाग 6.3 दोबारा पढ़ लें।

पुनर्समूहीकरण के संदर्भ में, ज़रा यह देखें कि 8 वर्षीय राधा को 'उधार' की अवधारणा सीखने में किस तरह की मदद दी गई थी।

उदाहरण 3 : एक साल पहले कक्षा 2 में राधा के शिक्षक ने इकाई/दहाई/सैकड़ा की अवधारणा कई गतिविधियों के माध्यम से समझाई थी। परंतु राधा उस समझ का उपयोग अब 'हासिल' और 'उधार' वाले सवालों में नहीं कर पा रही थी। उसकी मदद के लिए मैंने उसके साथ एक खेल खेलने की सोची।

मेरे पास कार्डबोर्ड के कुछ वर्गाकार (1 वर्ग इंच) टुकड़े थे — 15 काले, 15 पीले और कुछ लाल। मैंने राधा से कहा कि हम इनसे एक खेल खेलेंगे। एक कागज़ पर मैंने 9 इंच की दूरी पर दो आड़ी समान्तर रेखाएं खींच दीं। फिर मैंने उसे समझाया कि हम इन वर्गाकार टुकड़ों से संख्याएं कैसे दर्शाएंगे — काले टुकड़े इकाइयों की संख्या दर्शाएंगे, पीले टुकड़े दहाई और लाल टुकड़े सैकड़ा की संख्या दर्शाएंगे। और सबसे दाएं कॉलम में इकाइयां होंगी, अगले कॉलम में दहाई और तीसरे कॉलम में सैकड़ा की संख्या होंगी। मैंने उसे कुछ उदाहरण भी दिखाए (चित्र 8(क) देखें)।

शुरूआती हिचक के बाद वह इस तरह के प्रदर्शन से परिचित हो गई। हर बार जब वह कोई संख्यांक दर्शाती, तो मैं उससे कहती कि वह संख्या को दशानि के लिए लाल, पीले, काले टुकड़ों की संख्या को तीन कॉलम वाली तालिका में लिखे। तालिका के प्रत्येक कॉलम के शीर्ष पर क्रमशः ला., पी. और का. लिखा हो (ला., लाल के लिए, वगैरह)। मैंने उसे ला., पी. और का. के ऊपर सै., द., इ. भी लिखने को कहा, जैसा कि चित्र 8(ख) में दिया गया है।



चित्र 8 : 548 का प्रदर्शन — (क) कार्डों से, (ख) दशमलव प्रणाली में।

अब मैंने उसे बताया कि खेल का एक नियम यह है कि हम रेखाओं को पार नहीं कर सकते। इसका मतलब यह हुआ कि हर कॉलम में हम 9 टुकड़े ही रख सकते हैं। इसके बाद का हाल पढ़िए।

मैं : क्या हमें किसी कॉलम में 9 से ज्यादा टुकड़ों की ज़रूरत होगी ?

राधा : हाँ।

मैं : अच्छा, कोई संख्या सोचो जिसमें तुम्हें एक कॉलम में 9 से ज्यादा टुकड़े लगेंगे।

(थोड़ी देर सोचने के बाद उसे अपनी गलती का अहसास हो गया।)

राधा : नहीं, 9 के बाद हम दहाई पर चले जाते हैं।

मैं : शाबाश! और दहाई के कॉलम में क्या होगा ? क्या उसमें तुम्हें नौ से ज्यादा पीले टुकड़े लगेंगे ?

राधा : नहीं, तब हम सैकड़ा के कॉलम में चले जाएंगे।

स्पाइक अबेकस (spike abacus) के इस घरेलू रूप के साथ हम थोड़ी देर और खेले। इसके बाद हमने इस साधन का उपयोग करते हुए दो संख्याओं का जोड़ शुरू किया। शुरुआत $15 + 21$ से की। पहले तो वह ठीक से समझ नहीं पा रही थी कि इसे कैसे करे। जब उसे कुछ संकेत दिए तो उसने सोचा कि दो कागज़ों का इस्तेमाल करेगी — एक 15 दर्शाने के लिए और दूसरा 21 के लिए। फिर थोड़ा सोचने के बाद और थोड़ी बातचीत के बाद उसने 21 के काले टुकड़े को 15 के पांच काले टुकड़ों के ऊपर रख दिया, और दो पीले टुकड़ों को 15 के एक पीले टुकड़े के ऊपर। उसे वही जवाब मिला जो वह चाहती थी।

यहां तक तो ठीक चला। ऐसे कुछ और अभ्यास करने के बाद हम उन स्थितियों की ओर बढ़े जहां लेन-देन (हासिल-उधार) ज़रूरी हो। मसलन, $15 + 16$ में। पहले उसने 15 और 16 को अलग-अलग दर्शाया। फिर उसने 16 के 6 काले टुकड़ों को 15 के 5 काले टुकड़ों के ऊपर रखा और 16 के पीले टुकड़े को 15 के पीले टुकड़े के ऊपर रख दिया।

मैं : लेकिन तुम्हारे काले टुकड़े तो ऊपरी रेखा को पार कर गए हैं। इसके बारे में क्या करोगी ?

राधा : हाँ, हाँ, याद है। मैं इनमें से दस हटाकर उसकी जगह एक पीला टुकड़ा रख सकती हूँ।

मैं : शाबाश! यानी तुम 10 काले टुकड़ों के बदले एक पीला टुकड़ा रख सकती हो। दस इकाई के बदले एक दहाई। तो तुम दहाई के कॉलम में एक और दहाई जोड़ दोगी। इसका मतलब है कि तुम दहाई कॉलम में 1 हासिल करोगी।

यह करने के बाद उसने लिख लिया कि अब उसके पास कितने काले और कितने पीले टुकड़े हैं। बस, उत्तर आ गया 31. मैंने उससे कहा कि अब तक हमने जो कुछ किया उसे उसी तरह लिखेंगे जिस तरह हमने संख्याओं को लिखा था। शुरू में कुछ मदद के बाद उसने यह काम कर डाला, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

सै.	द.	इ.	
ला.	पी.	का.	
	1	5	
+	1	6	
	2	11	= 2 पीले + 11 काले = 2 पीले + 1 पीला + 1 काला
	3	1	= 3 पीले + 1 काला

हमने इस तरह के कई और अभ्यास किए ताकि वह ठोस प्रस्तुति को अमूर्त ऐल्गोरिद्म से जोड़ना सीख पाए।

इसके बाद हमने ऐसे सवाल उठाए जिनमें लाल टुकड़ों, यानी सैकड़ा, की जरूरत पड़े। हमने $57 + 66$ जैसे कई सवाल किए, और जो कुछ किया उसे साथ-साथ लिखते गए। उसे तीन अंकों की संख्याओं के साथ 'हासिल' की बात पकड़ने में देर न लगी।

यह काम करते हुए मैं उससे लगातार पूछती जाती थी कि मुझे समझाए कि वह क्या कर रही है। जल्दी ही मैंने देखा कि वह संबंधित गणितीय भाषा का इस्तेमाल काफी सहजता से करने लगी है।

कुछ दिनों बाद हमने इस गतिविधि को थोड़ा और आगे बढ़ाया। फिर हमने $+25$ ⁶⁸ जैसे सवाल बगैर वर्गाकार टुकड़ों के किए। धीरे-धीरे वह दो अंकों का कोई भी जोड़ आसानी से करने लगी और 'हासिल' की अवधारणा की आदी हो गई।

— X —

और अब एक अभ्यास।

E14) बच्चों को 'उधार' की अवधारणा समझने में मदद के लिए एक गतिविधि विस्तार में लिखिए।

इस खंड में हमने देखा कि जब बच्चे आँख मूंदकर किसी 'विधि' को बगैर समझे इस्तेमाल करते हैं तो किस तरह की गलतियां होती हैं। कई बार तो वे यह भी नहीं समझ पाते कि उनका उत्तर कितना उटपटांग है। यदि वे मन में इतना अंदाज़ा भी लगा पाएं कि उत्तर क्या होना चाहिए तो वे समझ जाएंगे कि 'कहीं कुछ गड़बड़' जरूर है। तो उनकी अंदाज़ा लगाने की क्षमता का विकास कैसे करें? अब हम इसी सवाल का उत्तर देने की कोशिश करेंगे।

7.6 अंदाज़ा लगाने का कौशल विकसित करना

पांच ग्रामीण स्कूलों के तीसरी व चौथी कक्षा के बच्चों के साथ एक अध्ययन यह जानने के लिए किया गया था कि वे मानक ऐल्गोरिद्मों को कितनी हद तक ठीक से समझते हैं। बच्चों को $1234 + 469$ जैसे सवाल हल करने के लिए दिए गए। जवाब बहुत दिलचस्प थे। कई जवाब ऐसे थे :

$$\begin{array}{r} 1234 \\ +469 \\ \hline 5924 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1234 \\ +469 \\ \hline 16913 \end{array}$$

खुद बच्चों को ऐसे उत्तरों पर कोई आश्चर्य नहीं हुआ। जाहिर है कि लगभग क्या उत्तर होना चाहिए उस का अंदाज़ा लगा पाने की उनमें क्षमता नहीं थी। इसलिए उन्होंने खुद से यह सवाल ही नहीं किया कि "क्या मेरा उत्तर ठीक लगता है?"।

उत्तर का अंदाज़ा लगाने की क्षमता महत्वपूर्ण क्यों है? क्या हम रोज़ाना इसका इस्तेमाल बारम्बार नहीं करते? मसलन, जब हम खरीददारी करने निकलते हैं और जल्दी से यह देखना चाहते हैं कि क्या चीज़ों की कुल कीमत हमारे बजट के अंदर रहेगी, तो क्या हम इसी क्षमता का उपयोग नहीं करते?

उत्तर का अंदाज़ा लगाने की क्षमता से गणितीय गलतियां पकड़ने में भी मदद मिलती है।

कैल्कुलेटर (calculator) का इस्तेमाल करते वक़्त भी, इस क्षमता से हमें यह जांच करने में मदद मिलती है कि कहीं हमने ग़लत बटन तो नहीं दबा दिया। नीचे दिए गए अभ्यास को करते वक़्त

E15) दो ऐसी स्थितियां बताइए जिनमें आपको दो संख्याओं के जोड़ या अंतर के लगभग सही उत्तर का तुरंत अंदाज़ा लगाना पड़ता है।

इस क्षमता को विकसित करने के लिए लोग कई तरीकों का उपयोग करते हैं। मसलन, 1821, 695 और 250 को जोड़ते वक़्त कुछ लोग मन में अंदाज़ा लगाने के लिए

(i) इन संख्याओं को 'राउंड ऑफ़' (सन्निकटन) करके इन नई संख्याओं से गणना कर सकते हैं :

$$1800 + 700 + 200 \quad \text{या} \quad 1800 + 700 + 300$$

(ii) सबसे बाईं ओर के अंकों के आधार पर एक मोटा अनुमान लगाने के बाद बाकी अंकों को देखकर अपने अंदाज़े को घटा-बढ़ा सकते हैं :

$$\text{पहले } 1000 + 600 + 200, \text{ और फिर } 800 + 100 + 50 \text{ जोड़ा।}$$

इसके अलावा भी कई तरीके हैं, जैसे संख्याओं के झुण्ड बना लेना, या सुसंगत संख्याओं को जोड़ लेना, वगैरह। कब, कौन सा तरीका इस्तेमाल होगा, यह तो सवाल पर निर्भर करता है। सावधानीपूर्वक दिए गए निर्देशों, बातचीत और अभ्यास द्वारा ही ये, व अन्य ऐसे तरीके विकसित किए जा सकते हैं।

इस संदर्भ में निम्नलिखित स्थिति पर गौर कीजिए।

उदाहरण 4 : प्राइमरी स्कूल की शिक्षक शीला ने यह समझ लिया था कि बच्चों को गणितीय संक्रियाएँ सिखाने का एक अहम पहलू यह है कि उनमें अपेक्षित परिणाम का अंदाज़ा लगाने की क्षमता विकसित की जाए। ऐसा करने के लिए शीला बच्चों की उन ग़लतियों का ही सहारा लेती है जो वे सूत्र लागू करते समय करते हैं। मसलन, शीला ने 8 वर्षीय राजू को $+17$ हल करने को दिया। राजू का उत्तर 310 आया। शीला ने उससे पूछा कि यह उत्तर कैसे आया। राजू ने उसे अपना उत्तर समझाया। तब शीला ने पूछा, "यदि तुम्हारे पास 23 गोलियां हैं और कोई तुम्हें 17 गोलियां और दे दे, तो क्या तुम्हारे पास 300 से ज़्यादा गोलियां हो जाएंगी?" राजू ने कहा, "बिलकुल नहीं।" "तो तुम्हारे पास कितनी गोलियां होंगी?" अब उसने जोड़ के लिए अलग तरीका इस्तेमाल किया और सही उत्तर निकाल लिया।

शीला ने राजू के साथ अंदाज़ा-संबंधी कुछ और गतिविधियां करने की ठानी। इसके लिए उसने दस-दस तीलियों के कुछ बंडल तथा कुछ खुली तीलियां जुटाईं। उसने राजू से 33 तीलियां और 25 तीलियां जोड़ने को कहा। राजू ने पहले 3 बंडल और 3 तीलियां ले लीं, और फिर 2 बंडल और 5 तीलियां और ले लीं। शीला ने राजू से तुरंत यह बताने को कहा कि क्या ये चालीस से ज़्यादा होंगी। थोड़ा सोचकर उसने जवाब दिया, "हां, पांच बंडल हैं, तो ये चालीस से ज़्यादा होंगी।"

"बढ़िया! क्या ये 70 से ज़्यादा होंगी?"

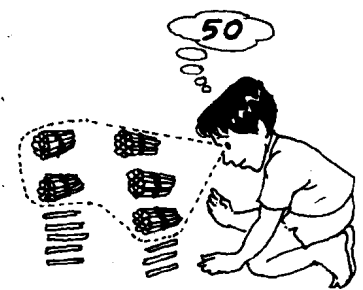
"नहीं, पांच बंडल हैं, तो ये पचास ही होना चाहिए।"

"और खुली तीलियां? क्या वे 20 से ज़्यादा हो सकती हैं?"

"नहीं।"

"क्यों?"

यहाँ पर धैर्य से तथा कुछ उदाहरणों की मदद से शीला उसे यह समझाने में सफल रही कि किसी भी संख्या में 9 से ज़्यादा इकाइयां नहीं हो सकतीं। और, इस तरह से, वह यह समझ गया



चित्र 9: $33 + 25$ लगभग 50 होता है।

कि दो संख्याओं की इकाइयां जुड़कर 2 बंडल से ज्यादा नहीं हो सकतीं, यानी 2 दहाइयों से ज्यादा नहीं हो सकतीं।

ऐसे ही कुछ और उदाहरणों के जरिए राजू धीरे-धीरे वह बात समझ पाया जो शीला चाहती थी — कि दो अंकों की संख्या जोड़ते वक्त हम पहले उन संख्याओं के दहाई के अंकों को जोड़कर जोड़ का अंदाज़ा लगा सकते हैं। जल्दी ही वह अमूर्त सवालों में इस कौशल का इस्तेमाल आसानी से करने लगा। अब उसे तीलियों के इस्तेमाल की ज़रूरत नहीं थी।

शीला ने उसे यह भी समझने में मदद दी कि कैसे अंदाज़ा लगाने का इस्तेमाल करके वह यह जांच कर सकता है कि गणना से उसे जो उत्तर मिला है, वह सही लगता है या नहीं। उसने कई उदाहरणों के माध्यम से इस बात को दर्शाया। इसके बाद शीला ने उसे कुछ सवाल दिए और उनके लगभग उत्तर तथा ठीक उत्तर दोनों निकालने को कहा।

अपने इस अनुभव से शीला यह समझ गई कि किसी बच्ची में यह क्षमता विकसित होने के लिए ज़रूरी है कि वह बारम्बार इसका अभ्यास करती रहे। इसलिए वह अक्सर राजू को ऐसे सवाल देती रहती है कि 'यदि वह 60 रुपये लेकर बाज़ार जाए, तो क्या वह 35 रुपये की किताबें और 17 रुपये की पेंसिलें खरीद पाएगा?'।

— X —

इसी मकसद को पूरा करने के लिए शीला कई अन्य गतिविधियों का सहारा ले सकती थी। निम्नलिखित अभ्यास करते हुए ऐसी अन्य गतिविधियों के बारे में सोचिए।

E16) दो या दो से ज्यादा अंकों वाली संख्याओं के अंतर का अंदाज़ा लगाना सीखने में बच्चों को मदद देने के लिए आप किस तरीके का इस्तेमाल करेंगे ?

अंदाज़ा लगाना एक ऐसा कौशल है जिसे कई संदर्भों में विकसित करना होता है। यहां हम इस पर कुछ और नहीं कहेंगे, लेकिन अगली इकाई में और ब्लॉक 4 व 5 में यह बात फिर से आएगी।

और अब जोड़ने-घटाने की समस्याओं की चर्चा को समाप्त करने से पहले जल्दी से यह देख लिया जाए कि हमने क्या कुछ बातचीत की।

7.7 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बातों पर चर्चा की :

- 1) बच्चों को जोड़ने व घटाने की संक्रियाओं का अर्थ समझाने के कुछ तरीके।
- 2) जोड़ने व घटाने से संबंधित इबारती सवालों के अलग-अलग किस्मों जो बच्चों के सामने आती हैं।
- 3) लगभग शुरू से ही बच्चों को इबारती सवाल करवाने का महत्व।
- 4) जोड़ने/घटाने के ऐल्गोरिद्मों का उपयोग करते वक्त बच्चे गलतियां क्यों करते हैं।
- 5) इन दो संक्रियाओं में 'हासिल' व 'उधार' की अवधारणा समझने में बच्चों की मदद कैसे करें।
- 6) संख्याओं के योग/अंतर का अंदाज़ा लगाने की क्षमता बच्चों में कैसे विकसित करें।

7.8 अभ्यासों पर टिप्पणियां

E2) ऐसा करना इसलिए ज़रूरी है ताकि बच्चे रंग, आकार, आकृति जैसे गुणात्मक अंतरों में न उलझें। मसलन, एक छोटी बच्ची से आप शुरू में यह उम्मीद नहीं कर सकते कि वह दो संतरों और तीन केलों को जोड़कर पांच फल कहे। वह उन्हें देखेगी और कह देगी कि दो संतरे और तीन केले हैं।

E3) इन दोनों के बीच अंतर कर पाना हमेशा आसान नहीं होता। खास बात यह है कि एकत्रीकरण में दो या दो से ज्यादा चीजों को आपस में मिलाया जाता है जबकि वृद्धि में किसी एक चीज को एक निश्चित मात्रा से बढ़ाया जाता है। दूसरी किस्म से बच्चों का वास्ता ज्यादातर पैसे या मापन के संदर्भ में होता है।

दूसरी किस्म में पहले के बनस्पत ज्यादा समझ की ज़रूरत है। इसलिए बेहतर होगा कि बच्चे पहली किस्म से वाकिफ होने के बाद, शायद कक्षा 2 में आकर ही इससे सामना करें।

E4) बच्चों का सम्पर्क दोनों किस्म के इबारती सवालों से चीजों, पैसे, मापन, समय, आदि के संदर्भ में कराना ज़रूरी है। शुरू में सवाल जानी-पहचानी चीजों से जुड़े हों, जिन्हें बच्चे टटोल सकें। इससे उन्हें सवाल हल करने में आसानी होगी। थोड़े ऊंचे स्तर पर उनसे विभिन्न चीजों की खरीदारी की कुल कीमत पता करने को कहा जा सकता है (पहली किस्म)। इसी प्रकार से आप ज़रा बड़े बच्चों से (कक्षा 3 या 4 में) पूछ सकते हैं कि इस वक्त उनकी उम्र कितनी है और 15 वर्ष बाद कितनी होगी (दूसरी किस्म)।

जहां तक मापन का संबंध है, जब तक वे विभिन्न इकाइयों व उप-इकाइयों के बारे में सीख नहीं जाते, तब तक यह ज़रूरी होगा कि सभी राशियां एक ही इकाई में हों।

E5) अंतर शब्दों में है। 'तुलना' किस्म का जो उदाहरण हमने दिया है वह प्रतीकों के रूप में यों लिखा जा सकता है : $15 - 5 = \square$

पूरक जोड़ के उदाहरण को प्रतीकों के रूप में इस तरह लिखा जाएगा : $\square + 20 = 50$.

E7) उदाहरण के लिए, पासे और पत्थरों का खेल — जिसे ज्यादा पत्थर मिलते हैं वह जीतेगा, और जितने ज्यादा पत्थर मिलते हैं, इस आधार पर निश्चित अंकों से जीतेगा।

E9) आपने जो मुख्य दिक्कतें देखी होंगी, वे निम्नलिखित प्रकार की हो सकती हैं :

i) 'हासिल' को न समझने की वजह से। मसलन, वह

$$\begin{array}{r} 62 \\ -28 \\ \hline 46 \end{array} \quad \text{या} \quad \begin{array}{r} 6^1 2 \\ -28 \\ \hline 44 \end{array} \quad \text{जैसी गलतियां करती है।}$$

ii) जिन संख्याओं में 0 कोई अंक नहीं है, उनके साथ बच्ची हासिल के सवाल ठीक से कर लेती है। लेकिन जहां 0 आया, उससे गड़बड़ हो जाती है, जैसे कि

$$\begin{array}{r} 60 \\ -28 \\ \hline 42 \end{array} \quad \text{या} \quad \begin{array}{r} 60 \\ -28 \\ \hline 48 \end{array} \quad \text{में।}$$

iii) 'उधार लेना' या पुनर्समूहीकरण करने के बाद भी बच्ची को पूरक जोड़ करना होगा। जैसे कि

$$\begin{array}{r} 63 \\ -28 \\ \hline \end{array} \quad \text{में पुनर्समूहीकरण करके}$$

दहाई	इकाई
85	13
2	8

मिलता है।

अभी भी बच्ची को यह तो पता करना ही होगा कि 8 में कितना जोड़ने से 13 बनता है, जो पूरक जोड़ का उदाहरण है।

iv) $\begin{array}{r} 200003 \\ - 78697 \\ \hline \end{array}$ जैसे सवालों में 3 में से 7 घटाने के लिए 1 लाख उधार लेना होगा।

इससे वे चक्कर में पड़ जाती है।

हमने और दिक्कतें भाग 7.5 में बताई हैं।

E12) दोनों, लेकिन पहला ज्यादा महत्वपूर्ण है। अगर बच्ची की मानसिक प्रक्रियाएं और कौशल ठीक तरह विकसित हों, तो वह कई तरह के सवाल ठीक से कर पाएगी। हो सकता है कभी-कभार गलत उत्तर आ जाए, क्योंकि उसका ध्यान कहीं और हो। लेकिन दूसरी ओर, अगर शिक्षक सिर्फ सही उत्तर को चाहे, तो हो सकता है कि बच्चे ठीक से गणित कभी न सीखें।

E13) इसके लिए उन्हें निम्नलिखित जैसे पैटर्नों को बनाने और बढ़ाने का मौका दें।

i) $\begin{array}{l} 1 + 1 = 2 \\ 2 + 1 = 3 \\ \vdots \\ 8 + 1 = 9 \\ 9 + 1 = 10 \end{array}$

ii) $\begin{array}{l} 1 - 1 = 0 \\ 2 - 1 = 1 \\ \vdots \\ 9 - 1 = 8 \end{array}$

iii) $\begin{array}{l} 1 + 1 = 2 \\ 2 + 2 = 4 \\ \vdots \\ 9 + 9 = 18 \end{array}$

iv) $\begin{array}{l} 2 - 2 = 0 \\ 3 - 2 = 1 \\ \vdots \\ 9 - 2 = 7 \end{array}$

E14) बच्चों को ढेर सारी माचिस की तीलियां देकर उनसे कहिए कि वे इनके दस-दस के बंडल बना लें (जैसा इकाई 6 के उदाहरण 4 में किया था)। सबसे पहले तो उन्हें इस बात से अच्छी तरह परिचित होने दीजिए कि बंडल दहाई और तीलियां इकाई को दर्शाती हैं। अब वे इनका उपयोग घटाने की क्रमबद्ध गतिविधियों में करें — पहले 16-5 जैसे, फिर 26-9 जैसे, और आगे चलकर 82-37 जैसे सवाल करके। 26-9 जैसे सवालों को हल करते हुए उन्हें उधार का अर्थ समझ आने लगेगा क्योंकि इसमें उन्हें 20 दर्शाने वाले दो बंडलों में से एक लेकर, उसे खोलकर पहले से मौजूद 6 तीलियों में से दस तीलियां जोड़नी होंगी।

	बंडल	तीलियां
-	2	6
-		9
कुल		

बंडल	तीलियां
1	16
-	9
1	7

इस गतिविधि को विभिन्न तरीकों से अलग-अलग चीजों के साथ कई बार दोहराएं। इसके बाद ठोस वस्तुओं के सहारे के बगैर घटाने की संक्रिया का अभ्यास करवाएं। इस तरह के काफी अभ्यास के बाद बच्चे उधार वाले घटाने के सवाल, मन में भी आराम से करने लगेंगे।

E16) आप 'बंडल' गतिविधि या इकाई 6 में दी गई 'मोती' गतिविधि को ढालकर उपयोग कर सकते हैं। अनगिनत सम्भावनाएं मौजूद हैं।